

# Programma del Corso di Analisi Matematica II

## Anno Accademico 2023/2024

Enzo Mitidieri

8 Giugno 2023

**Spazi metrici e spazi normati.** Spazi metrici: generalità sugli spazi metrici, Intorni aperti e chiusi, esempi importanti di metriche, metriche limitate, metriche equivalenti, esempi e controesempi. Funzioni continue su spazi metrici, casi notevoli (funzioni vettoriali, etc...), funzioni localmente e globalmente Lipschitziane. La convergenza uniforme e quella puntuale. Esempi e controesempi. Lo spazio  $C^0$  e  $C^1$ . La non-completezza di  $C^1$  con la norma uniforme. Caratterizzazione della continuità di una funzione mediante successioni. Teoremi di passaggi al limite sotto il segno di integrale (casi speciali). Spazi vettoriali. Lo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Richiami sulle proprietà algebriche di  $\mathbb{R}^n$ . Base canonica e base duale, proiezioni, etc. Spazi di Banach e di Hilbert: La non equivalenza delle norme  $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$  e  $\| \cdot \|_\infty$  su  $C([a, b]; \mathbb{R})$ . Operatori lineari fra spazi normati: caratterizzazione degli operatori lineari continui. Norma di un operatore. Esempi e controesempi. Ogni operatore lineare avente dominio uno spazio di dimensione finita è continuo. Relazione fra la norma di un operatore fra spazi di dimensione finita e la norma matriciale della matricie che lo rappresenta. Esempi, controesempi ed esercizi. Lo spazio  $\mathbb{R}^n$  come spazio di Banach. Norme notevoli su  $\mathbb{R}^n$ . Spazi con prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Spazio duale di uno spazio di Hilbert. La disuguaglianza di Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz.

**L' identità del parallelogramma.** Funzionali lineari. Il teorema di Riesz. Lo spazio  $\mathbb{R}^n$  come spazio di Hilbert. Insiemi convessi. Caratterizzazione dell'elemento di minima distanza da un convesso chiuso di uno spazio di Hilbert. Proiezioni sui convessi chiusi. Casi notevoli. Spazi metrici compatti. Il concetto di compattezza. L' utilità del concetto di compattezza. Uno spazio metrico compatto è completo. limitati e totalmente limitati. Esempi e contro esempi. Caratterizzazione degli insiemi compatti dello spazio  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ . Il teorema di Weierstrass e suoi corollari.

Funzioni coercive (esempi ed esercizi). In  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$  tutte le norme sono equivalenti. Compattezza e uniforme continuità. Il teorema di Ulisse Dini sulla convergenza uniforme di successioni di funzioni continue. Esempi e contro esempi. Il teorema di Stefan Banach-

Emile Picard-Renato Caccioppoli detto anche delle contrazioni. Esempi, contro esempi ed esercizi riguardanti le contrazioni.

### **Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.**

Il concetto di derivata direzionale. Esempi. Derivate parziali. Il differenziale di una funzione. Se  $f$  è differenziabile allora è derivabile lungo ogni direzione. Esempi di funzioni derivabili lungo ogni direzione in un punto ma non continue nel punto. Ogni funzione con derivate parziali continue in un punto è localmente Lipschitziana. La rappresentazione del differenziale di una funzione. Relazione fra il gradiente di una funzione e il differenziale della stessa. Il teorema del differenziale totale. Il teorema del valor medio. L' utilità del teorema del valor medio. Piano tangente ad un grafico e sua relazione con la differenziabilità. Derivate successive. Multi-indice. Il teorema sull' inversione dell' ordine di derivazione (Clairaut, Schwarz, Young etc.). Funzioni di classe  $C^k$ . La formula di Taylor per funzioni di più variabili. Esempi di sviluppo di una funzione applicando la formula di Taylor. Differenziale di funzioni vettoriali. Condizione sufficiente per la differenziabilità di funzioni vettoriali. Differenziale di funzioni composte. Esempi.

**Massimi e minimi per funzioni di più variabili.** Il concetto di differenziale secondo. Rappresentazione del differenziale secondo. Forme quadratiche. rappresentazione di forme quadratiche. Studio delle forme quadratiche. Forme definite positive, negative, indefinite. Caratterizzazione delle forme definite positive (negative). Massimi e minimi locali per funzioni di più variabili. Caratterizzazione dei massimi (minimi) per funzioni di più variabili. Esempi e controesempi. Criteri per il calcolo dei massimi e minimi per funzioni di più variabili. Funzione omogenee e loro caratterizzazione via il teorema di Eulero. Esempi ed esercizi.

**Massimi e minimi vincolati per funzioni di più variabili.** Il teorema di Ulisse Dini o della funzione implicita : il caso scalare ed il caso vettoriale. Vincoli espliciti e vincoli impliciti. Il concetto di spazio tangente. Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange .

**Equazioni differenziali ordinarie.** Che cos'è una equazione differenziale? Equazioni differenziali di ordine superiore e sistemi. Equazioni autonome e non autonome. Il concetto di soluzione. Esempi notevoli di integrazione di equazioni differenziali del primo ordine. Il problema di Cauchy. Approssimazioni della soluzione. Intervallo massimale di esistenza. Condizioni sufficienti per l'esistenza del problema di Cauchy. Esempi. Prolungamento delle soluzioni. La nozione di prolungamento. Teorema di esistenza della soluzione massimale. Condizioni sufficienti per l'esistenza globale. Esempi di esplosione della soluzione in tempo finito. Esempi concreti di calcolo dell'intervallo massimale di esistenza. Il lemma

di Gronwall e sue variazioni e applicazioni : in particolare il teorema di esistenza globale sotto ipotesi di sub-linearità (e in ipotesi di Lipschitzianità). Studi qualitativi. Sistemi ed equazioni lineari. Esistenza globale per equazioni o sistemi lineari. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare. Equazioni lineari di ordine superiore ad uno e caratterizzazione del loro insieme di soluzioni. Esempi. Il caso speciale in cui i coefficienti sono costanti. Esempi.

**Integrale di Riemann in più variabili.** Definizione di integrale di Riemann. Condizione equivalente per l'integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue. Misura di Peano-Jordan. Insiemi misurabili. Caratterizzazione degli insiemi misurabili tramite gli insiemi di misura nulla. Misurabilità dei grafici di funzioni integrabili. Domini normali. Formule di riduzione sui domini normali. Proprietà di linearità e monotonia dell'integrale. Teorema della media integrale. Teorema di cambio di variabile negli integrali multipli. Integrali di funzioni su domini illimitati.

**Curve.** Generalità sulle curve, curve di classe  $C^k$ . Sostegno di una curva. Curve equivalenti. Curve rettificabili. Lunghezza di una curva. Rettificabilità di una curva di classe  $C^1$ . Integrale al differenziale d'arco.

**Forme differenziali.** Generalità sulle forme differenziali. Forme differenziali esatte. Integrazione delle forme differenziali su un cammino. Condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza di una forma di classe  $C^0$  su un dominio connesso. Forme differenziali chiuse. Teoremi di continuità e derivabilità di integrali dipendenti da un parametro. Domini stellati. Condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza di una forma di classe  $C^1$  su un dominio stellato. Campi vettoriali in  $\mathbb{R}^3$ . Rotore di un campo vettoriale. Campi conservativi e campi irrotazionali. Potenziale. Formule di Gauss e Green sul piano per domini normali. Generalizzazioni delle formule di Gauss e Green. Partizione dell'unità. Teorema della divergenza in  $\mathbb{R}^2$ . Integrazione per parti per funzioni di più variabili.

**Formule di Gauss e Green per le forme differenziali.** Frontiera orientata. Aperti semplicemente connessi. Forme chiuse su aperti semplicemente connessi. Applicazione della teoria delle forme differenziali alla soluzione delle equazioni differenziali.

**Superfici.** Generalità sulle superfici. Superfici regolari. Area di una superficie. Formula di cambio di variabile per un integrale superficiale. Teorema della divergenza in  $\mathbb{R}^3$ . Formula di Stokes.

**Serie di funzioni.** Ruchiami sulla teoria elementare delle serie numeriche. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale ed uniforme. Teoremi di integrazione e derivazione per successioni. Il criterio della convergenza totale. Serie di potenze: teorema di derivazione per le serie di potenze (caso reale). Teorema di Hadamard. Teorema di Abel . Sviluppi in serie di Taylor. Una condizione sufficiente per lo sviluppo in serie di Taylor. Sviluppi notevoli.

Lucinico, 8 Giugno 2023

Enzo Mitidieri

