

I Provetta

Istituzioni di Matematiche II per Sc. Geologiche
A.A. 1999–2000

15 gennaio 2000

1) Provare che i tre vettori:

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

costituiscono una base di \mathbb{R}^3 . Calcolare le coordinate di $v = (1, 1, 1)$ rispetto a tale base.

2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 + x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_3).$$

- Calcolare la matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ;
- Determinare una base di $\text{Im}(f)$ e di $\text{kern}(f)$;
- f è iniettiva? È suriettiva? Giustificare le risposte.

3) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = \sin(x) \sin(y),$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$.

- Calcolare il gradiente di f e la matrice hessiana;
- Dire quale dei seguenti punti di A è massimo o minimo per f e giustificare la risposta:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right).$$

4) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$y'(x) = 3y(x) + e^x, \quad y'(x) = \frac{\cos(x)}{y^2}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$