1 Definizione di ambienti per teoremi, lemmi, etc.

Proposizione 1 *Tutti i numeri primi maggiori di* 2 *sono dispari. Vale inoltre:*

1. *Se* p *e* q *sono numeri primi maggiori di* 2*, allora* $p+q$ *è pari;*
2. *se* p *è un numero primo maggiore di* 2*, allora* p^2+1 *non è primo.*

Dimostrazione. Omessa, poiché troppo difficile. □

Teorema 1 *Sia* $N(n) := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ è primo e } p \leq n\}$ *e sia* $\pi(n)$ *la cardinalità di* $N(n)$ *(dove* $n \in \mathbb{N}$*). Allora vale:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi(n)}{n} \bigg/ \frac{1}{\log(n)} = 1 \tag{1}$$

DIM.: Banale esercizio □

Teorema 2 *Definiamo la funzione*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^n}, \text{ per ogni } s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1$$

Allora vale:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{2}$$

(dove il prodotto è fatto su tutti i numeri primi).

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia e non vale la pena riportarla qui. □

Lemma 1.1 *Le soluzioni dell'equazione:*

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

sono inferiori a 10 *e valgono rispettivamente* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$*.*

Usando l'idea sottostante alla dimostrazione del precedente lemma, risolvere:

Esercizio 1 *Trovare le soluzioni dell'equazione* $\zeta(s) = 0$*.*

Proposizione 1.1 *Tutti i numeri primi maggiori di* 2 *sono dispari. Vale inoltre:*

1. *Se* p *e* q *sono numeri primi maggiori di* 2*, allora* $p+q$ *è pari;*
2. *se* p *è un numero primo maggiore di* 2*, allora* p^2+1 *non è primo.*

Dimostrazione. Omessa, poiché troppo difficile. □

Teorema 1.2 *Sia* $N(n) := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ è primo e } p \leq n\}$ *e sia* $\pi(n)$ *la cardinalità di* $N(n)$ *(dove* $n \in \mathbb{N}$*). Allora vale:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi(n)}{n} \bigg/ \frac{1}{\log(n)} = 1 \tag{3}$$

DIM.: Banale esercizio □

Teorema 1.3 *Definiamo la funzione*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^n}, \text{ per ogni } s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1$$

Allora vale:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{4}$$

(dove il prodotto è fatto su tutti i numeri primi).

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia e non vale la pena riportarla qui. □

Lemma 1.4 *Le soluzioni dell'equazione:*

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

sono inferiori a 10 *e valgono rispettivamente* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$*.*

Usando l'idea sottostante alla dimostrazione del precedente lemma, risolvere:

Esercizio 1.5 *Trovare le soluzioni dell'equazione* $\zeta(s) = 0$*.*

2 Riferimenti incrociati etc.

Come abbiamo visto nel teorema 1.2 e soprattutto nell'equazione (3), ...
Dal lemma 1.1 abbiamo che...
Se consideriamo la condizione 2 della prop. 1.1...
Il teorema 1.2 è stato enunciato nella sezione 1...

3 La bibliografia

Nel libro [Lam] è stato presentato...
Dal teorema 9.27 [M-S, pag. 189] si ha che...
L'articolo [Her] è scritto in francese.

Riferimenti bibliografici

[EHS] Eisenbud, David (ed.); Harris, Joe (ed.); Schreyer, Frank-Olaf (ed.) Report 27/2006: Classical Algebraic Geometry (June 11th — June 17th, 2006). Oberwolfach Rep. 3, No. 2, 1615—1662 (2006).

[Her] L'Hermite, Robert "Pieces rectangulaires planes de faible epaisseur soumises à des pressions peripheriques situees dans leur plan." C. R. Acad. Sci., Paris 195, 941—943 (1932).

[Lam] Lamport, Leslie "LaTeX 2_ε, A document preparation system", Addison–Wesley Publishing Company, Inc. 1995.

[M-S] Miller, Ezra; Sturmfels, Bernd "Combinatorial commutative algebra." Graduate Texts in Mathematics 227. New York, NY: Springer. xiv, 417 p.