Esempio di calcolo di un anello di invarianti

Consideriamo il gruppo Γ rappresentato dalle seguenti 4 matrici di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Il gruppo Γ è il gruppo ciclico di ordine 4. La serie di Hilbert dell'anello $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$, calcolata con il teorema di Molien, dà:

$$\begin{aligned} \Phi_\Gamma(z) &= \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z+1)^2(z-1)^2} \\ &= 1 + z^2 + 3z^4 + 3z^6 + 5z^8 + 5z^{10} + 7z^{12} + 7z^{14} + \cdots \end{aligned}$$

Dalla serie scritta sopra si vede che $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$ ha un invariante in grado 0 (che è la costante 1), un invariante linearmente indipendente in grado 2, tre invarianti lineramente indipendenti in grado 4 e 6 e così via. Per calcolare l'invariante di grado 2 applichiamo l'operatore di Reynolds ai monomi x^2, xy, y^2. Si trova che vengono mandati, rispettivamente, in $(x^2+y^2)/2, 0, (x^2+y^2)/2$. Quindi l'unico invariante di grado 2 linearmente indipendente è, a meno di un fattore costante, $I_1 = x^2 + y^2$. Ci chiediamo se vale:

$$\mathbb{C}[I_1] = \mathbb{C}[x,y]^\Gamma?$$

Calcoliamo allora la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[I_1]$ e confrontiamola con la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$.
Consideriamo l'omomorfismo $\phi : \mathbb{C}[u] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$ che manda u in I_1. Se ad u diamo peso $2 = \deg I_1$, ϕ diventa un omomorfismo graduato la cui immagine è $\mathbb{C}[I_1]$ ed è iniettivo, quindi la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[I_1]$ coincide con la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[u]$ con u di peso 2, che vale:

$$1/(1-z^2) = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \cdots$$

Confrontando le due serie di Hilbert vediamo che dobbiamo trovare per lo meno due invarianti indipendenti in grado 4. Cerchiamoli con l'operatore di Reynolds: i monomi di grado 4 sono: $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$ e sono mandati dall'operatore di Reynolds, rispettivamente, in:

$$x^4+y^4, \quad x^3y - xy^3, \quad x^2y^2, \quad -x^3y + xy^3, \quad x^4 + y^4$$

(per semplificare la scrittura sono stati tutti moltiplicati per opportune costanti). Scegliamo $I_2 = x^4 + y^4$ e $I_3 = x^3y - xy^3$. Ci chiediamo allora se ora vale:

$$\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3] = \mathbb{C}[x,y]^\Gamma$$

Dobbiamo quindi calcolare la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$. Costruiamo l'omomorfismo $\phi : \mathbb{C}[u,v,w] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$ dato da $\phi(u) = I_1$, $\phi(v) = I_2$, $\phi(w) = I_3$ e dove u, v, w hanno peso, rispettivamente, $2, 4, 4$. L'omomorfismo ϕ è graduato, la sua immagine è $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$ e il suo nucleo si calcola considerando l'ideale $J = (u - I_1, v - I_2, w - I_3)$ in $\mathbb{C}[u, v, w, x, y]$ e intersecandolo con l'anello $\mathbb{C}[u, v, w]$. Si trova:

$$J \cap \mathbb{C}[u, v, w] = (u^4 - 3u^2v + 2v^2 + 2w^2)$$

Quindi I_1, I_2 e I_3 sono algebricamente dipendenti. Si può ora calcolare la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$ che è quindi la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[u, v, w]/(u^4-3u^2v+2v^2+2w^2)$. Si trova che quest'ultima coincide con la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[x, y]^\Gamma$ e quindi a questo punto ci si ferma nella ricerca di invarianti: si sono trovati 3 fondamentali: I_1, I_2 e I_3 che generano tutto $\mathbb{C}[x, y]^\Gamma$. Inoltre, tra i tre invarianti sussiste la relazione algebrica:

$$I_1^4 - 3I_1^2 I_2 + 2I_2^2 + 2I_3^2 = 0.$$

Consideriamo infine il seguente polinomio:

$$\begin{aligned} f &= 4x^9y - 4xy^9 + 7x^8 + x^6y^2 + 12x^4y^4 + x^2y^6 \\ &\quad +7y^8 + 3x^5y - 3xy^5 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 10 \end{aligned}$$

Questo polinomio è un invariante per l'azione del gruppo Γ. Per verificarlo, basta ad esempio applicare ad f l'operatore di Reynolds e constatare che si riottiene f. Pertanto deve essere un elemento di $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$. Per scrivere f come polinomio in I_1, I_2 e I_3 basta calcolare la forma normale di f rispetto alla base di Gröbner $\mathcal{G}$ di J fatta rispetto ad un term-order di eliminazione. Si ottiene:

$$\mathrm{NF}(f, \mathcal{G}) = 4uvw + u^2 + 7v^2 + 3uw + w^2 - 10$$

Pertanto f è dato da $4I_1I_2I_3 + I_1^2 + 7I_2^2 + 3I_1I_3 + I_3^2 - 10$. L'equazione $f = 0$ dà una curva nel piano. Il suo grafico è rappresentato dalla figura sottostante e, come si vede, è dato da una curva che resta immutata se si ruotano gli assi di multipli di 90^o.