

Corso di laurea in Geologia
Istituzioni di matematiche
a.a. 2014–15
Scritto 23 settembre 2015

Istruzioni per lo svolgimento:

Gli studenti dell'anno accademico 2014/15 che hanno superato il test intermedio, devono svolgere gli esercizi 4, 5, 6, 7, 8.

Gli studenti dell'anno accademico 2014/15 che non hanno superato il test intermedio, devono svolgere gli esercizi 1, il primo di 2 – a), il primo di 2 – b), 4, 5, 6, 7, 8.

Gli studenti degli anni accademici precedenti che devono superare l'esame di complementi di matematiche, devono svolgere gli esercizi 4, 5, 6, 7, 8.

Gli studenti degli anni accademici precedenti che devono superare l'esame di istituzioni di matematiche, devono svolgere gli esercizi 1, 2, 3.

Nome:	Cognome:
-------	----------

Anno di Corso:	Esame di:
----------------	-----------

Indicare gli esercizi che si dovrebbero svolgere:

Allegare il presente foglio all'elaborato consegnato.

1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da: $f(x) = x^3 + x + 1$. La funzione f è continua? Se sì, perché? Per quale teorema si può dire che la funzione ha almeno uno zero nell'intervallo $[-1, 1]$?
2. Calcolare i seguenti limiti (*senza* usare la regola di de l'Hopital):

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3 \sin(x^3 - 1)}{\sin(x^2 - 1) + 2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cos(x)}{\sin(4x - 4)}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x \cos(x)}{3x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x}$$

3. Si ricordi che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *crescente* in $[a, b]$ se per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$, se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Usando questa definizione, provare che la funzione $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 + x + 1$ è crescente (in $[0, 3]$). Se come insieme di definizione di f si fosse scelto l'intervallo $[-3, 3]$ la funzione sarebbe stata ancora crescente?
4. Sia $f(x) = (2 - x)(x - 2e^x)$. Studiare la funzione f e tracciare approssimativamente il suo grafico.
5. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si annulla la derivata della seguente funzione (log indica il logaritmo in base naturale):

$$f(x) = x \left(3 \log(x^{x^2-3}) + 9 - x^2 \right)$$

6. Data la funzione reale di due variabili reali: $f(x, y) = 3x^2 + y^2$, dire se il punto $(0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella per f .
7. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int x \sin(x^2 + 1) dx, \quad \int (x + 1)e^x dx$$

8. Sia $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$. Calcolare:

$$\iint_D \sin(x)y^2 dx dy$$