Consideriamo il sistema lineare:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Sia A la matrice completa del sistema, quindi:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{11} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La matrice A una matrice di tipo $m \times (n+1)$. In A l'ultima colonna è stata evidenziata inserendo una barra verticale.

Dopo aver applicato il metodo di Gauss-Jordan alla matrice A, quindi dopo averla modificata con le tre operazioni elementari di riga in modo da avere che le prime righe e le prime colonne della matrice siano la matrice identica, si possono presentare i seguenti casi:

- La matrice ottenuta è della forma: $(I \mid B)$ dove I è la matrice identica e B è la colonna dei termini noti. Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  La soluzione del sistema si trova subito convertendo la matrice finale nel sistema lineare corrispondente. Nel nostro caso si ottiene:

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

- La matrice ottenuta è della forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} I & B_1 \\ \hline \mathbf{0} & B_2 \end{array}\right)$$

  dove I è la matrice identica, $\mathbf{0}$ è una matrice le cui entrate sono tutte nulle, B_1 e B_2 formano la colonna dei termini noti. In questa situazione si distinguono due casi: se B_2 ha qualche entrata non nulla, il sistema non ha soluzioni. Se B_2 è tutta nulla, le ultime righe della matrice sono tutte nulle e si possono cancellare, rientrando così nel caso precedente. Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

In questo caso la matrice B_2 ha le entrate 0 e 2. Pertanto le ultime due righe della matrice, danno le seguenti due equazioni nel sistema lineare associato:

$$0 = 0 \ \text{ e } \ 0 = 2$$

La prima equazione è un'identità e non fornisce informazioni utili, ma la seconda è un'affermazione falsa, quindi il sistema associato e pertanto anche il sistema di partenza non possono avere soluzioni.

- La matrice ottenuta è della forma: $(I \mid U \mid B)$ dove I è la matrice identica, U è una matrice qualunque e B è la colonna dei termini noti. Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Le soluzioni si trovano convertendo la matrice nel sistema lineare associato e considerando le incognite corrispondenti alla matrice U come libere. Nel sostro esempio si ottiene:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ x_2 & - & 2x_4 & & & = & 2 \\ x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{e quindi} \quad \left\{\begin{array}{ccl} x_1 & = & -3x_4 + 2x_5 + 1 \\ x_2 & = & 2x_4 + 2 \\ x_3 & = & -3x_4 - x_5 + 4 \end{array}\right.$$

Le soluzioni sono allora descritte da:

$$(-3x_4 + 2x_5 + 1, 2x_4 + 2, -3x_4 - x_5 + 4, x_4, x_5)$$

dove x_4 e x_5 sono libere, cioè possono assumere un qualunque valore.

- La matrice ottenuta è della forma:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I & U & B_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_2 \end{array}\right)$$

Anche in questo caso, se B_2 è la matrice nulla, ci si riconduce al caso precedente ignorando le righe nulle, se B_2 non è la matrice nulla, il sistema non ha soluzioni. Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

In questo caso l'ultima riga della matrice dà l'uguaglianza $0 = 2$ che è assurda, quindi il sistema non ha soluzione. Se invece anche l'ultima riga della matrice avesse tutte le entrate nulle, il sistema sarebbe lo stesso del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

e quindi, analogamente all'esempio precedente, le soluzioni sarebbero: $(-2x_4 + 2x_5 + 1, x_4 + 2, -2x_4 - x_5 + 3, x_4, x_5)$.

- Rimane ancora un caso possibile che non è contemplato dai precedenti. La matrice potrebbe presentarsi in una forma come la seguente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} & & & 2 & -2 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 2 \\ & & & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

La matrice identica messa nel riquadro non si può ulteriormente ingrandire ad una matrice identica di ordine 4 con sole operazioni elementari di riga, però l'elemento di posto $(4, 5)$ non è zero, quindi non si ricade nel caso precedente (e in nessuno degli altri già visti). Un modo per risolvere questa situazione è scambiare tra loro la quarta e la quinta colonna, operazione che corrisponde a scambiare nel sistema lineare associato, i nomi delle incognite x_4 e x_5. Con questo scambio la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Questa si può ancora manipolare con operazioni elementari di riga, ottenendo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Quindi le soluzioni del sistema lineare associato a questa matrice sono:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_5 - 3 \\ x_2 = x_5 + 2 \\ x_3 = -2x_5 - 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Ricordando che abbiamo scambiato i nomi alle incognite x_4 e x_5, per ottenere le soluzioni del sistema di partenza basta scambiare nuovamente x_4 con x_5 ottenendo:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 - 3 \\ x_2 = x_4 + 2 \\ x_3 = -2x_4 - 1 \\ x_5 = -2 \end{cases}$$