lez14ott14

```
load("gaussJ.py")
```

Il metodo di Gauss-Jordan per la soluzione di sistemi lineari

Data una matrice M, modificheremo M con le tre operazioni elementari di riga:

moltiplicaRiga(i, k) (moltiplica la riga i della matrice per la costante non nulla k)
scambioRighe(i, j) (scambia la riga i con la riga j della amtrice)
aggiungiRigaMoltiplicata(i, j, k) aggiunge la riga i moltiplicata per k alla riga j)

Faremo anche uso del comando:

sistemaAssociato()

che scrive il sistema lineare associato alla matrice M

```
M = matrix(QQ, [[1, 2, -1, 3], [3, -1, 2, 1], [2, -2, 1, 1]]);
show(M)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Guardo chi è il sistema associato alla matrice completa M (l'ultima colonna di M rappresenta i termini noti)

```
sistemaAssociato()
```

$$x_1 + 2\,x_2 - x_3 = 3$$

$$3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 1$$

$$2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 1$$

Con operazioni elementari sulle righe modifico M in modo opportuno

```
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 2, -3)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 3, -2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & -6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(2, 3, -6/7)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}$$

```
moltiplicaRiga(3, -7/9)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(3, 2, -5)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} \end{pmatrix}$$

```
moltiplicaRiga(2, -1/7)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(3, 1, 1)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(2, 1, -2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto una matrice che è costituira dalla matrice identica di ordine 3 con un'ulteriore colonna dei termini noti. Ora il sistema associato ci fornisce direttamente le soluzioni del sistema:

```
sistemaAssociato()
```

$$x_1 = 4/3$$

$$x_2 = 1/9$$

$$x_3 = -13/9$$

Nuovo esempio. Consideriamo la matrice completa M e il sistema associato:

```
M = matrix(QQ, [[1, 2, -1, 3, 6],[2, 1, 1, -2, 4],[2, -2, 2, 3,
7],[1, 4, 1, 5, 12]]); show(M)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

```
sistemaAssociato()
```

$$x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 3\,x_4 = 6$$

$$2\,x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 = 4$$

$$2\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 = 7$$

$$x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 5\,x_4 = 12$$

Procediamo con la manipolazione di M per mezzo di operazioni elementari sulle righe:

```
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 2, -2)
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 3, -2)
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 4, -1)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -8 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -8 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -8 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(3, 2, -1/2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -6 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(4, 3, 3)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 13 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

```
scambioRighe(2, 4)
```

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \end{array}\right)$$

```
moltiplicaRiga(2, 1/2)
```

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \end{array}\right)$$

```
scambioRighe(4, 3)
```

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 13 \end{array}\right)$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(3, 4, -10)
```

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 68 & 68 \end{array}\right)$$

```
moltiplicaRiga(4, 1/68)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(4, 3, 13/2)
aggiungiRigaMoltiplicata(4, 2, -1)
aggiungiRigaMoltiplicata(4, 1, -3)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(3, 2, -1)
aggiungiRigaMoltiplicata(3, 1, 1)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(2, 1, -2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anche in questo esempio siamo riusciti a trovare la matrice identica di ordine 4 con l'ulteriore colonna dei termini noti. Il sistema associato ci fornisce direttamente le soluzioni del sistema di partenza:

```
sistemaAssociato()
```

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1$$

Un nuovo esempio di sistema lineare

```
M = matrix(QQ, [[1, 2, 2, 1], [3, 1, 4, -1], [4, 3, 6, 3]]);
show(M)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 2, -3)
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 3, -4)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(2, 3, -1)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
moltiplicaRiga(2, -1/5)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(2, 1, -2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Questo esempio è di natura diversa rispetto ai due esempi precedenti: non riusciamo più a manipolare la matrice anche se non abbiamo ottenuto la matrice identica di ordine 3, come sarebbe lecito aspettarsi, sulla base dell'esperienza fatta con i due esempi precedenti. Il problema nasce dal fatto che l'ultima riga della matrice contiene "troppi" zeri. Vediamo chi è il sistema associato:

```
sistemaAssociato()
```

$$x_1 + \frac{6}{5}\ x_3 = -3/5$$

$$x_2 + \frac{2}{5}\ x_3 = 4/5$$

$$0 = 3$$

L'ultima equazione del sistema associato dice 0=3, cosa ovviamente falsa. Abbiamo quindi raggiunto una contraddizione. Poiché il sistema ora trovato è equivalente al sistema considerato all'inizio, abbiamo che le equazioni del sistema dato sono contradditorie e quindi il sistema NON ha soluzioni.

Consideriamo un ulteriore esempio:

```
M = matrix(QQ, [[1, 2, 2, 2], [3, 1, 4, -1], [4, 3, 6, 1]]);
show(M)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 2, -3)
aggiungiRigaMoltiplicata(1, 3, -4)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(2, 3, -1)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
moltiplicaRiga(2, -1/5)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
aggiungiRigaMoltiplicata(2, 1, -2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche qui non troviamo una matrice identica di ordine 3, perché l'ultima riga nuovamente contiene "troppi" zeri. Siamo però riusciti a costruire una matrice identica di ordine 2 che è quella che ci permetterà di trovare le soluzioni del sistema. Guardiamo infatti il sistema associato:

```
sistemaAssociato()
```

$$x_1 + \frac{6}{5}\, x_3 = -4/5$$

$$x_2 + \frac{2}{5}\ x_3 = 7/5$$

$$0 = 0$$

Ora l'ultima equazione dice una verità, non una contraddizione, come prima. Le altre due equazioni permettono di trovare x_2 e x_1 in funzione di x_3, basta riscrivere le prime due equazioni nel seguente modo:

x_1 = -4/5-6/5 x_3

x_2 = 7/5-2/5 x_3

Dato un qualunque valore ad x_3, possiamo trovare i corrispondenti valori per x_1 e x_2. Le soluzioni sono della forma: (-4/5-6/5 a, 7/5-2/5 a, a) con a che varia nei numeri reali. Ad esempio soluzioni sono: (-4/5, 7/5, 0), (-2, 1, 1), (-16/5, 3/5, 2), (-22/5, 1/5, 3), (-28/5, -1/5, 4), (-34/5, -3/5, 5), (-8, -1, 6), (-46/5, -7/5, 7), (-52/5, -9/5, 8), (-58/5, -11/5, 9) ottenute per a=0, 1, 2, ..., 9. In particolare abbiamo infinite soluzioni.