Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica, a.a. 2021/2022

Nota: questi appunti sono in fase di costruzione

1 Teoria dell'integrale - il caso $N = 1$

In tutta questa sezione indicheremo con I un intervallo compatto $[a, b]$ di $\mathbb{R}$.

1.1 P-partizioni e somme di Riemann

Incominciamo con l'introdurre la nozione di p-partizione dell'intervallo I.

Definizione 1 *Una "partizione puntata" (o "p-partizione") dell'intervallo $I = [a, b]$ è un insieme*

$$\mathring{\mathcal{P}} = \{(x_1, [a_0, a_1]), (x_2, [a_1, a_2]), \dots, (x_m, [a_{m-1}, a_m])\}$$

i cui elementi appaiono come coppie $(x_j, [a_{j-1}, a_j])$, dove $[a_{j-1}, a_j]$ è un sottointervallo di I e x_j è un punto in esso. Precisamente, si ha

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b$$

e, per ogni $j = 1, \dots, m$,

$$x_j \in [a_{j-1}, a_j].$$

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, ad ogni p-partizione di I possiamo associare un numero reale, nel modo seguente.

Definizione 2 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione e $\mathring{\mathcal{P}}$ è una p-partizione di I, si chiama "somma di Riemann" associata a f e $\mathring{\mathcal{P}}$ il numero reale*

$$S(f, \mathring{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}).$$

Nel caso di una funzione f positiva, questo numero è la somma delle misure delle aree dei rettangoli aventi come base $[a_{j-1}, a_j]$ e altezza $[0, f(x_j)]$.

Ci chiediamo ora se, prendendo delle p-partizioni via via più fini, le somme di Riemann ad esse associate convergano ad un qualche valore. Per poter analizzare la questione, dobbiamo specificare cosa si intende per "finezza" di una p-partizione.

1.2 La nozione di δ-finezza

Introduciamo una nozione di finezza della p-partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ sopra definita. Per brevità, chiameremo "calibro" su I ogni funzione $\delta : I \to \mathbb{R}$ tale che

$$\delta(x) > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in I\,.$$

Una tale funzione ci servirà per avere un controllo sull'ampiezza dei vari sottointervalli determinati dai punti della p-partizione.

Definizione 3 *Dato che sia un calibro δ su I, diremo che la p-partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ sopra introdotta è "δ-fine" se, per ogni $j = 1, \dots, m$,*

$$x_j - a_{j-1} \le \delta(x_j) \quad e \quad a_j - x_j \le \delta(x_j)\,,$$

o equivalentemente

$$[a_{j-1}, a_j] \subseteq [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)]\,.$$

È sempre possibile trovare una p-partizione δ-fine dell'intervallo I, qualunque sia il calibro δ.

Teorema 4 *Dato un intervallo compatto I, per ogni calibro δ su I esiste una p-partizione δ-fine di I.*

Dimostrazione. Ragioneremo per assurdo. Supponiamo che esista un calibro δ su I per il quale non sia possibile trovare alcuna p-partizione δ-fine di I. Dividiamo l'intervallo I in due sottointervalli uguali, aventi il punto di mezzo come estremo comune. Allora almeno uno dei due sottointervalli non ha alcuna p-partizione δ-fine. Scegliamolo, e dividiamolo a sua volta in due sottointervalli uguali. Continuando in questo modo, ci costruiamo una successione $(I_n)_n$ di sottointervalli imbottigliati la cui lunghezza tende a zero, ognuno dei quali non possiede alcuna p-partizione δ-fine. Per il Teorema di Cantor, esiste uno ed un solo punto $c \in I$ che appartiene a tutti questi intervalli. È inoltre chiaro che da un certo n in poi, tutti gli I_n saranno contenuti in $[c-\delta(c), c+\delta(c)]$. Prendiamo uno di questi: sia esso $I_{\bar{n}}$. Allora l'insieme $\mathring{\mathcal{P}} = \{(c, I_{\bar{n}})\}$, il cui unico elemento è la coppia $(c, I_{\bar{n}})$, è una p-partizione δ-fine di $I_{\bar{n}}$, in contraddizione con quanto sopra. ■

1.3 Funzioni integrabili su un intervallo compatto

Siamo ora in grado di definire cosa intendiamo per convergenza delle somme di Riemann qualora le p-partizioni diventino via via più fini. La seguente definizione è dovuta a J. Kurzweil e R. Henstock.

Definizione 5 *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice "integrabile" su I se esiste un numero reale $\mathcal{J}$ avente la seguente proprietà: comunque scelto $\varepsilon > 0$, si può trovare un calibro δ su I tale che, per ogni p-partizione δ-fine $\mathring{\mathcal{P}}$ di I, si abbia*

$$|S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - \mathcal{J}| \le \varepsilon\,.$$

Dimostriamo che esiste al più un $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione. Se ce ne fosse un secondo, chiamiamolo $\mathcal{J}'$, avremmo che per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbero due calibri δ e δ' su I associati rispettivamente a $\mathcal{J}$ e a $\mathcal{J}'$ dalla definizione. Definiamo il calibro δ'' :

$$\delta''(x) = \min\{\delta(x), \delta'(x)\}\,.$$

Presa una p-partizione δ''-fine $\mathring{\mathcal{P}}$ di I, si ha che $\mathring{\mathcal{P}}$ è sia δ-fine che δ'-fine, e perciò

$$|\mathcal{J} - \mathcal{J}'| \leq |\mathcal{J} - S(f, \mathring{\mathcal{P}})| + |S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - \mathcal{J}'| \leq 2\varepsilon\,.$$

Siccome ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$, si deve necessariamente avere $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$.

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su I, l'unico elemento $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione si chiama "integrale" di f su I e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\int_I f\,, \quad \int_a^b f\,, \quad \int_I f(x)\,dx\,, \quad \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

La presenza della lettera x nella notazione qui introdotta non ha importanza in sè. Essa potrebbe essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera u, α, o da un qualunque altro simbolo, purché non abbia già un altro significato.

Si pone inoltre

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \quad \text{e} \quad \int_a^a f = 0\,.$$

Definizione 6 *Diremo che una funzione integrabile su I è ivi "R-integrabile" (o "integrabile secondo Riemann"), se tra i possibili calibri δ che verificano le condizioni della definizione di integrabilità se ne può sempre prendere uno costante su tutto I.*

Si può dimostrare che questa definizione è equivalente a quella data nel corso di Analisi Matematica 1, in cui si sono utilizzate le "somme inferiori" e le "somme superiori".

Definizione 7 *Diremo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, integrabile su I, è ivi "L-integrabile" (o "integrabile secondo Lebesgue"), se $|f|$ risulta anch'essa integrabile su I.*

1.4 Proprietà elementari dell'integrale

Elenchiamo alcune proprietà fondamentali dell'integrale.

Proposizione 8 *Se f e g sono integrabili su I, allora $f + g$ è integrabile su I e si ha:*

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g\,.$$

Proposizione 9 *Se f è integrabile su I e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora αf è integrabile su I e si ha:*

$$\int_I (\alpha f) = \alpha \left(\int_I f \right).$$

L'insieme delle funzioni integrabili è pertanto uno spazio vettoriale, e l'integrale è una funzione lineare su di esso.

Proposizione 10 *Se f e g sono integrabili su I e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I$, allora*

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Corollario 11 *Se f è L-integrabilie su I, allora*

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

<u>Dimostrazione</u>. Applicando il corollario precedente alle disuguaglianze

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

si ha

$$-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|,$$

da cui la tesi. ■

Vale inoltre la seguente proprietà di additività dell'integrale.

Proposizione 12 *Siano dati tre punti $a < c < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se lo è sia su $[a, c]$ che su $[c, b]$. In tal caso, si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Per la convenzione adottata sopra, si ha il seguente

Corollario 13 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è integrabile su I, presi comunque tre punti u, v, w in I si ha*

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f.$$

1.5 Il Teorema Fondamentale

Introduciamo il concetto di funzione primitiva di una data funzione.

Definizione 14 *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice "primitivabile" su I se esiste una funzione derivabile $F : I \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Una tale funzione F si chiama "primitiva" di f su I.*

Il seguente teorema stabilisce che tutte le funzioni primitivabili sono integrabili, e che il loro integrale si può calcolare facilmente, nota che sia una loro primitiva.

Teorema 15 (Teorema Fondamentale) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione primitivabile su $[a, b]$ e sia F una qualunque sua primitiva. Allora f è integrabile su $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Talvolta è comodo indicare la differenza $F(b) - F(a)$ con i simboli

$$[F]_a^b\,, \quad [F(x)]_{x=a}^{x=b}\,,$$

o con varianti di questi, come ad esempio $[F(x)]_a^b$, qualora non ci siano ambiguità.

Il fatto che la differenza $F(b) - F(a)$ non dipende dalla primitiva in questione è spiegato dalla seguente proposizione.

Proposizione 16 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione primitivabile, e sia F una sua primitiva. Allora una funzione $G : I \to \mathbb{R}$ è primitiva di f se e solo se $F - G$ è una funzione costante su I.*

Sappiamo che ogni funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ è primitivabile. In generale, però, non è detto che una funzione primitivabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia R-integrabile, e nemmeno L-integrabile.

Supponiamo ora di avere una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che l'insieme

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$$

sia finito o numerabile (ad esempio una funzione nulla ovunque tranne in un punto, oppure la funzione di Dirichlet, definita da $f(x) = 1$ se x è razionale e $f(x) = 0$ se x è irrazionale). Dimostriamo che una tale funzione è integrabile e

$$\int_a^b f = 0\,.$$

Supponiamo per esempio che E sia infinito (il caso in cui E è finito si tratta in modo analogo). Essendo numerabile, possiamo scrivere $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Fissato $\varepsilon > 0$, costruiamo un calibro δ su $[a,b]$ in questo modo: se $x \notin E$, poniamo $\delta(x) = 1$; se invece per un certo n si ha $x = e_n$, poniamo

$$\delta(e_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+3}|f(e_n)|}\,.$$

Sia ora $\mathring{\mathcal{P}} = \{(x_j, [a_{j-1}, a_j]) : j = 1, \ldots, m\}$ una p-partizione $\delta-$fine di $[a,b]$. Per come è definita f, la relativa somma di Riemann si riduce a

$$S(f, \mathring{\mathcal{P}}) = \sum_{\{j:\, x_j \in E\}} f(x_j)(a_j - a_{j-1})\,.$$

Ora, $[a_{j-1}, a_j] \subseteq [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)]$, per cui $a_j - a_{j-1} \leq 2\delta(x_j)$. D'altra parte, se $x_j \in E$ si ha che $x_j = e_n$, per un certo $n \in \mathbb{N}$, per cui

$$x_1 = e_{n_1}\,, x_2 = e_{n_2}\,, \ldots, x_m = e_{n_m}\,.$$

Denotiamo con N il più grande degli indici $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Bisogna fare attenzione al fatto che potrebbe succedere che sia $x_j = x_{j+1}$ per qualche j. Allora

$$\begin{aligned}|S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - 0| &= \left| \sum_{\{j:\, x_j \in E\}} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \right| \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{N} |f(e_n)| 2\delta(e_n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{4\varepsilon}{2^{n+3}} = \varepsilon \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ciò dimostra che f è integrabile su $[a,b]$ e che $\int_a^b f = 0$.

2 Integrazione di funzioni di più variabili

In questa sezione estenderemo la teoria sviluppata nella sezione precedente per poter trattare funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, a valori in $\mathbb{R}$. Per semplicità di esposizione, ci limiteremo spesso al caso $N = 2$. Non sarà difficile al lettore estendere la trattazione al caso di una dimensione N generica.

2.1 L'integrabilità sui rettangoli

Incominciamo con il considerare il caso di funzioni definite su rettangoli.

Consideriamo un rettangolo $I = [a,b] \times [c,d]$ in $\mathbb{R}^2$, la cui misura è

$$\mu(I) = (b-a)(d-c)\,.$$

Diremo che due rettangoli sono non sovrapposti se i loro interni sono disgiunti.

Una "p-partizione" del rettangolo I è un insieme

$$\mathring{\mathcal{P}} = \{(\boldsymbol{x}_1, I_1), (\boldsymbol{x}_2, I_2), \dots, (\boldsymbol{x}_m, I_m)\} ,$$

dove gli I_j sono dei rettangoli a due a due non sovrapposti tali che

$$I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m = I ,$$

e

$$\boldsymbol{x}_j \in I_j , \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, m .$$

Si chiama "somma di Riemann" associata a f e $\mathring{\mathcal{P}}$ il numero reale

$$S(f, \mathring{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^{m} f(\boldsymbol{x}_j)\mu(I_j) .$$

Nel caso di una funzione f positiva, questo numero è la somma delle misure dei volumi dei parallelepipedi aventi come base I_j e come altezza $[0, f(\boldsymbol{x}_j)]$.

Introduciamo una nozione di finezza della p-partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ sopra definita. Chiameremo "calibro" su I ogni funzione $\delta : I \to \mathbb{R}$ tale che $\delta(\boldsymbol{x}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in I$. In seguito, dati $\boldsymbol{x} = (x, y) \in I$ e $r > 0$, useremo la notazione

$$\overline{B}[\boldsymbol{x}, r] = [x - r, x + r] \times [y - r, y + r] .$$

Dato che sia un calibro δ su I, diremo che la p-partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ sopra introdotta è "δ-fine" se, per ogni $j = 1, 2, \dots, m$,

$$I_j \subseteq \overline{B}[\boldsymbol{x}_j, \delta(\boldsymbol{x}_j)] .$$

Come nel caso unidimensionale, si può dimostrare che per ogni calibro δ su I esiste una p-partizione δ-fine di I. La definizione che segue è identica a quella vista nel caso $N = 1$.

Definizione 17 *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice "integrabile" sul rettangolo I se esiste un numero reale $\mathcal{J}$ avente la seguente proprietà: comunque scelto $\varepsilon > 0$, si può trovare un calibro δ su I tale che, per ogni p-partizione δ-fine $\mathring{\mathcal{P}}$ di I, si abbia*

$$|S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - \mathcal{J}| \leq \varepsilon .$$

Elenchiamo ora brevemente tutte le proprietà che si possono ottenere a partire dalla definizione data in modo del tutto simile a quanto fatto nel caso di una funzione di una variabile.

Esiste al più un $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione. Tale numero reale si chiama "integrale" di f su I e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\int_I f , \quad \int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} .$$

L'insieme delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale, e l'integrale è una funzione lineare su di esso:

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g\,, \qquad \int_I (\alpha f) = \alpha \int_I f$$

($\alpha \in \mathbb{R}$); esso conserva l'ordine:

$$f \leq g \;\Rightarrow\; \int_I f \leq \int_I g\,.$$

Inoltre, si ha la seguente versione del teorema di "additività su sottorettangoli".

Teorema 18 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e siano $K_1, K_2, \ldots, K_l$ dei sottorettangoli di I a due a due non sovrapposti, la cui unione è I. Allora f è integrabile su I se e solo se lo è su ognuno dei K_i. In tal caso, si ha*

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{l} \int_{K_i} f\,.$$

Diremo che una funzione integrabile su I è "R-integrabile" (o "integrabile secondo Riemann"), se tra i possibili calibri δ che verificano le condizioni della definizione di integrabilità se ne può sempre prendere uno costante su tutto I. L'insieme delle funzioni R-integrabili è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni integrabili e contiene il sottospazio delle funzioni continue.

Diremo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, integrabile su I, è ivi "L-integrabile" (o "integrabile secondo Lebesgue"), se $|f|$ risulta anch'essa integrabile su I. Le funzioni L-integrabili costituiscono un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni integrabili che contiene il sottospazio delle funzioni R-integrabili.

2.2 L'integrale su un insieme limitato

Dato un insieme limitato E e una funzione f il cui dominio contiene E, definiamo la funzione f_E come segue:

$$f_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{se } \boldsymbol{x} \in E\,, \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{x} \notin E\,. \end{cases}$$

Possiamo dimostrare la seguente

Proposizione 19 *Siano I_1 e I_2 due rettangoli contenenti l'insieme E. Allora f_E è integrabile su I_1 se e solo se lo è su I_2. In tal caso, si ha che $\int_{I_1} f_E = \int_{I_2} f_E$.*

Siamo così portati alla seguente definizione.

Definizione 20 *Dato un insieme limitato E, diremo che la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è integrabile su E se esiste un rettangolo I contenente l'insieme E sul quale f_E risulta integrabile. In tal caso, si pone*

$$\int_E f = \int_I f_E \,.$$

Con la definizione data, si estendono facilmente tutte le proprietà dell'integrale viste finora. *Fa però eccezione l'additività*, in quanto non si può affermare in generale che una funzione integrabile su un insieme limitato lo sia anche sui suoi sottoinsiemi. Inoltre, le funzioni continue sono integrabili sui compatti.

Teorema 21 *Sia E un insieme compatto e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è L-integrabile su E.*

2.3 La misura di un insieme limitato

Definizione 22 *Un insieme limitato E si dice "misurabile" se la funzione costante 1 è integrabile su E. In tal caso, il numero $\int_E 1$ viene detto "misura" di E e si indica con $\mu(E)$.*

Nel caso di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, la misura si dice anche "area" dell'insieme. Se $E = [a, b] \times [c, d]$ è un rettangolo, si vede facilmente che

$$\mu(E) = \int_E 1 = (b - a)(d - c)\,,$$

per cui la notazione è compatibile con quella già introdotta per i rettangoli. Per un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, la misura si dice anche "volume" dell'insieme.

Purtroppo, non tutti gli insiemi sono misurabili. Si possono in effetti costruire degli insiemi non misurabili, con conseguenze talvolta imbarazzanti. Nel seguito faremo attenzione a che gli insiemi considerati siano sempre misurabili.

Vediamo alcune proprietà della misura. È utile introdurre la funzione caratteristica di un insieme E, definita da

$$\chi_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \in E\,, \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{x} \notin E\,. \end{cases}$$

Se I è un rettangolo contenente l'insieme E, si ha quindi

$$\mu(E) = \int_I \chi_E \,.$$

Proposizione 23 *Siano A e B due insiemi limitati misurabili. Valgono le seguenti proprietà:*

a) *Se* $A \subseteq B$*, allora* $B \setminus A$ *è misurabile e*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)\,;$$

in particolare, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b) $A \cup B$ *e* $A \cap B$ *sono misurabili e*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)\,;$$

in particolare, se A *e* B *sono disgiunti, allora* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Dimostrazione. Se $A \subseteq B$, si ha $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$, e la proprietà $a)$ segue integrando.

Essendo $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$ e $\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$, si ha che $\chi_{A\cup B}$ e $\chi_{A\cap B}$ sono integrabili. Inoltre,

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B\,,$$

e integrando si ha la $b)$. ■

Chiaramente, si ha che l'insieme vuoto è misurabile e $\mu(\emptyset) = 0$. Inoltre, si può dimostrare che ogni insieme aperto e limitato è misurabile, così come ogni insieme chiuso e limitato.

Proposizione 24 *Sia* E *un insieme limitato misurabile e* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata a valori non negativi. Sia* G_f *l'insieme così definito:*

$$G = \{(\boldsymbol{x}, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(\boldsymbol{x})\}\,.$$

Allora f *è integrabile su* E *se e solo se* G *è misurabile, nel qual caso si ha:*

$$\mu(G) = \int_E f\,.$$

3 Insiemi trascurabili

Definizione 25 *Diremo che un insieme limitato è "trascurabile" se è misurabile e la sua misura è nulla.*

Vediamo come si possono caratterizzare gli insiemi limitati trascurabili. Nella seguente proposizione, la dicitura tra parentesi quadre può essere omessa.

Proposizione 26 *Sia* E *un insieme limitato. Si ha che* E *è trascurabile se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una famiglia finita o numerabile* (J_k) *di rettangoli [a due a due non sovrapposti] tali che:*

$$E \subseteq \bigcup_k J_k\,, \qquad \sum_k \mu(J_k) \leq \varepsilon\,.$$

Ogni insieme costituito da un unico punto è trascurabile. Ma sono trascurabili anche tutti gli insiemi finiti o numerabili limitati. Il lato di un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ è un insieme trascurabile.

Definizione 27 *Sia E un insieme limitato. Una proposizione si dice essere vera "quasi ovunque" su E (o per quasi ogni punto di E) se l'insieme dei punti in cui non è vera è trascurabile.*

Teorema 28 *Se due funzioni f e g, definite sull'insieme limitato E, coincidono quasi ovunque, allora f è integrabile su E se e solo se lo è g. In tal caso, $\int_E f = \int_E g$.*

Quest'ultimo risultato ci permette di considerare delle funzioni definite quasi ovunque, e definirne l'integrale.

Definizione 29 *Una funzione f, definita quasi ovunque su un insieme limitato E, a valori reali, si dice integrabile su E se si può estendere ad una funzione $g : E \to \mathbb{R}$, integrabile su E. In tal caso, si pone $\int_E f = \int_E g$.*

Si può vedere che tutte le proprietà e i teoremi visti finora continuano a valere per tali funzioni.

Risulta interessante la seguente caratterizzazione delle funzioni R-integrabili.

Teorema 30 *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è R-integrabile se e solo se è limitata e continua quasi ovunque.*

4 La formula di riduzione

Il seguente teorema, dovuto a G. Fubini, permette di calcolare l'integrale di una funzione integrabile di due variabili effettuando due integrazioni di funzioni di una variabile.

Teorema 31 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul rettangolo $I = [a, b] \times [c, d]$. Allora:*
(i) per quasi ogni $x \in [a, b]$, la funzione $f(x, \cdot)$ è integrabile su $[c, d]$;
(ii) la funzione $\int_c^d f(\cdot, y)\, dy$, definita quasi ovunque su $[a, b]$, è ivi integrabile;
(iii) si ha:

$$\int_I f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

Dimostrazione. Per semplicità, assumeremo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia continua. Poniamo $\mathcal{J} = \int_I f$. Per ogni $x \in [a, b]$, essendo $f(x, \cdot) : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua, essa è integrabile; definiamo

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy\,.$$

Vogliamo dimostrare che F è integrabile su $[a, b]$ con integrale uguale a $\mathcal{J}$.

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per l'integrabilità di f su I, esiste un calibro δ su I tale che, per ogni p-partizione δ-fine $\mathring{\mathcal{P}}$ di I,

$$|S(f,\mathring{\mathcal{P}}) - \mathcal{J}| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Per ogni $x \in [a,b]$, essendo $f(x,\cdot)$ integrabile su $[c,d]$ con integrale $F(x)$, esiste un calibro $\bar{\delta}^x : [c,d] \to \mathbb{R}$ tale che, presa una qualsiasi p-partizione $\bar{\delta}^x$-fine $\mathring{\mathcal{P}}_2$ di $[c,d]$, si ha che

$$|S(f(x,\cdot),\mathring{\mathcal{P}}_2) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Possiamo supporre che sia $\bar{\delta}^x(y) \leq \delta(x,y)$, per ogni $(x,y) \in I$. Scegliamo allora, per ogni $x \in [a,b]$, una p-partizione $\bar{\delta}^x$-fine di $[c,d]$: sia essa

$$\mathring{\mathcal{P}}_2^x = \{(y_j^x, K_j^x) : j = 1,\dots,m^x\}\,.$$

Avremo dunque che, per ogni $x \in [a,b]$,

$$|S(f(x,\cdot),\mathring{\mathcal{P}}_2^x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Definiamo un calibro $\delta_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, ponendo

$$\delta_1(x) = \min\{\bar{\delta}^x(y_1^x),\dots,\bar{\delta}^x(y_{m^x}^x)\}\,.$$

Dimostreremo ora che, per ogni p-partizione δ_1-fine $\mathring{\mathcal{P}}_1$ di $[a,b]$, si ha che

$$|S(F,\mathring{\mathcal{P}}_1) - \mathcal{J}| \leq \varepsilon\,.$$

Consideriamo dunque una p-partizione δ_1-fine di $[a,b]$:

$$\mathring{\mathcal{P}}_1 = \{(x_i, J_i) : i = 1,\dots,n\}\,;$$

costruiamo, a partire da essa, una p-partizione δ-fine di I :

$$\mathring{\mathcal{P}} = \{((x_i, y_j^{x_i}), J_i \times K_j^{x_i}) : i = 1,\dots,n\,,\ j = 1,\dots,m^{x_i}\}\,.$$

Abbiamo le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
|S(F,\mathring{\mathcal{P}}_1) - \mathcal{J}| &\leq |S(F,\mathring{\mathcal{P}}_1) - S(f,\mathring{\mathcal{P}})| + |S(f,\mathring{\mathcal{P}}) - \mathcal{J}| \\
&\leq |S(f,\mathring{\mathcal{P}}) - S(F,\mathring{\mathcal{P}}_1)| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m^{x_i}} f(x_i, y_j^{x_i})\mu(J_i \times K_j^{x_i}) - \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\mu(J_i) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m^{x_i}} f(x_i, y_j^{x_i})\mu(K_j^{x_i}) - F(x_i) \right| \mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |S(f(x_i,\cdot),\mathring{\mathcal{P}}_2^{x_i}) - F(x_i)|\,\mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Ciò dimostra che F è integrabile e

$$\int_a^b F = \mathcal{J} \, .$$

La dimostrazione è quindi completa. ■

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 \sin y$ sul rettangolo $I = [-1,1] \times [0,\pi]$. Essendo f continua su un compatto, è ivi integrabile, per cui si ha:

$$\begin{aligned}\int_I f &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^\pi x^2 \sin y \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 [-\cos y]_0^\pi \, dx = 2 \int_{-1}^1 x^2 \, dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \, .\end{aligned}$$

Naturalmente, vale anche la seguente versione del Teorema di Fubini, simmetrica della precedente.

Teorema 32 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul rettangolo $I = [a,b] \times [c,d]$. Allora:*
(i) per quasi ogni $y \in [c,d]$, la funzione $f(\cdot, y)$ è integrabile su $[a,b]$;
(ii) la funzione $\int_a^b f(x,\cdot)\,dx$, definita quasi ovunque su $[c,d]$, è ivi integrabile;
(iii) si ha:

$$\int_I f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy \, .$$

Come immediata conseguenza, si ha che, se f è integrabile su $I = [a,b] \times [c,d]$, allora

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy \, .$$

In altri termini, se non vale l'uguaglianza ora scritta, la funzione f non è integrabile su I.

Esempi. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

sul rettangolo $I = [0,1] \times [0,1]$. Se $x \neq 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2+1} \, ,$$

per cui

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \right) dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \, .$$

Analogamente, si vede che

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}\,,$$

e se ne deduce che f non è integrabile su I.

Come ulteriore esempio, consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

sul rettangolo $I = [-1,1] \times [-1,1]$. In questo caso, se $x \neq 0$, si ha

$$\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \left[\frac{-x}{2(x^2+y^2)} \right]_{y=-1}^{y=1} = 0\,,$$

per cui

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = 0\,.$$

Analogamente, si vede che

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = 0\,.$$

Ciononostante, non si può concludere che f sia integrabile su I. In realtà non lo è proprio. Infatti, se lo fosse, dovrebbe essere integrabile anche sui sottorettangoli, e in particolare su $[0,1] \times [0,1]$. Ma, se $x \neq 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \left[\frac{-x}{2(x^2+y^2)} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2x(x^2+1)}\,,$$

che non è integrabile rispetto a x su $[0,1]$.

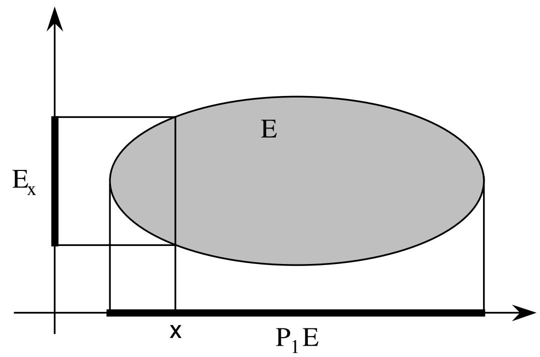
Se la funzione f è definita in un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^2$, si può applicare il teorema di riduzione alla funzione f_E. Sia $I = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo contenente E. Definiamo le "sezioni" di E :

$$E_x = \{y \in [c,d] : (x,y) \in E\}\,,\ E_y = \{x \in [a,b] : (x,y) \in E\}\,,$$

e le "proiezioni" di E :

$$P_1E = \{x \in [a,b] : E_x \neq \emptyset\}\,,\ P_2E = \{y \in [c,d] : E_y \neq \emptyset\}\,.$$

Possiamo allora riformulare il teorema nella forma seguente.



Teorema 33 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sull'insieme limitato E. Allora:*
(i) per quasi ogni $x \in P_1E$, la funzione $f_E(x, \cdot)$ è integrabile sull'insieme E_x;
(ii) la funzione $x \mapsto \int_{E_x} f(x,y)\,dy$, definita quasi ovunque su P_1E, è ivi integrabile;
(iii) si ha:

$$\int_E f = \int_{P_1E} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Analogamente, la funzione $y \mapsto \int_{E_y} f(x,y)\,dx$, definita quasi ovunque su P_2E, è ivi integrabile, e si ha:

$$\int_E f = \int_{P_2E} \left(\int_{E_y} f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x,y) = |xy|$ sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,,\ -x^2 \le y \le x^2\}\,.$$

Essendo f continua ed E compatto, si può applicare il teorema; si ha che $P_1E = [0,1]$ e, per ogni $x \in P_1E$, $E_x = [-x^2, x^2]$. Quindi:

$$\int_E f = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} |xy|\,dy \right) dx = \int_0^1 2\left[x\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}\,.$$

Come corollario, otteniamo un metodo per calcolare la misura di un insieme limitato misurabile.

Corollario 34 *Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme limitato misurabile, allora:*
(i) per quasi ogni $x \in P_1E$, l'insieme E_x è misurabile;
(ii) la funzione $x \mapsto \mu(E_x)$, definita quasi ovunque su P_1E, è ivi integrabile;
(iii) si ha:

$$\mu(E) = \int_{P_1E} \mu(E_x)\,dx\,.$$

Analogamente, la funzione $y \mapsto \mu(E_y)$, definita quasi ovunque su P_2E, è ivi integrabile, e si ha:

$$\mu(E) = \int_{P_2E} \mu(E_y)\,dy\,.$$

Nel caso di funzioni di più di due variabili, valgono risultati analoghi ai precedenti, con le medesime dimostrazioni. Separate le variabili in due gruppi, e chiamato x il primo gruppo di variabili e y il secondo, valgono esattamente le stesse formule scritte sopra. Inoltre, iterando il procedimento di riduzione, si possono dimostrare, per una funzione di N variabili integrabile su un rettangolo

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N]\,,$$

formule del tipo

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_N \ \dots \right) dx_2 \right) dx_1\,.$$

Esempi. 1) Calcoliamo l'area di un cerchio centrato nell'origine di raggio $r > 0$,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}\,.$$

Abbiamo che $P_1 E = [-r, r]$ e $E_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Quindi,

$$\mu(E) = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^2 \cos^2 u\, du = \pi r^2.$$

(Abbiamo operato la sostituzione $u = \arcsin(x/r)$, ossia $x = r \sin u$.)

2) Calcoliamo il volume di una palla tridimensionale centrata nell'origine di raggio $r > 0$,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}\,.$$

Possiamo procedere in due modi, a seconda di come raccogliamo le variabili.

<u>Primo modo</u>. Scriviamo $(x, y, z) = (x, (y, z))$. Abbiamo che $P_1 E = [-r, r]$ e

$$E_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \le r^2 - x^2\}\,, \qquad \text{per ogni } x \in [-r, r]\,.$$

Quindi, E_x è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - x^2}$, la cui area è $\mu(E_x) = \pi(r^2 - x^2)$, e possiamo calcolare

$$\mu(E) = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

<u>Secondo modo</u>. Scriviamo $(x, y, z) = ((x, y), z)$. Allora

$$P_1 E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}\,,$$

mentre

$$E_{(x,y)} = \left[-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right], \ \text{per ogni } (x, y) \in P_1 E\,.$$

Quindi,

$$\mu(E) = \int_{P_1 E} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy\,.$$

Usiamo di nuovo la formula di riduzione sull'insieme $D = P_1 E$. Abbiamo che $P_1 D = [-r, r]$ e $D_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\,]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Pertanto,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \int_D 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(r^2 - x^2)\cos^2 u\,du \right) dx = \frac{4}{3}\pi r^3.\end{aligned}$$

(Abbiamo operato la sostituzione $u = \arcsin(y/\sqrt{r^2 - x^2})$, o equivalentemente $y = \sqrt{r^2 - x^2}\sin u$.)

3) Vogliamo calcolare il volume del tetraedro regolare di lato ℓ. Lo supporremo appoggiato al piano xy, per cui la sua "base" è un triangolo equilatero di lato ℓ, altezza $h = \frac{1}{2}\ell\sqrt{3}$ e area $A = \frac{1}{4}\ell^2\sqrt{3}$. L'altezza del tetraedro E è pertanto

$$H = \sqrt{\ell^2 - (\tfrac{2}{3}h)^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\ell\,.$$

Raggruppiamo le variabili come $((x, y), z)$ e proiettiamo sull'asse z, ottenendo $P_2 E = \left[0, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\ell\right]$. Per ogni $z \in P_2 E$, la sezione E_z è un triangolo equilatero di lato $\ell_z = \ell - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,z$ e area

$$\mu(E_z) = \frac{1}{4}\ell_z^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\ell - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,z\Big)^2.$$

Pertanto,

$$\mu(E) = \int_0^H \mu(E_z)\,dz = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\ell} \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\ell - \sqrt{\frac{3}{2}}\,z\Big)^2 dz = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\ell^3.$$

Nota. Dehn ha dimostrato nel 1902, in risposta al Terzo Problema di Hilbert, che non è possibile tagliare il tetraedro in poliedri più piccoli che, ricombinati assieme, formino un parallelepipedo.

Più in generale, consideriamo ora un "cono" tridimensionale E. Esso è ottenuto prendendo un insieme S, che supponiamo contenuto in $\{(x, y, z) : z = 0\}$ (la "base" di E) e un punto $\boldsymbol{v} = (0, 0, h)$, con $h > 0$ (il "vertice" di E). L'insieme E è così definito:

$$E = \{(1 - \lambda)\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{x} : \lambda \in [0, 1],\ \boldsymbol{x} \in S\}\,.$$

La sua proiezione sull'asse z ci dà il segmento $P_2 E = [0, h]$, e per ogni $z \in P_2 E$ la sezione E_z ha un'area

$$\mu(E_z) = \Big(\frac{h - z}{h}\Big)^2 \mu(E_0) = \Big(\frac{h - z}{h}\Big)^2 \mu(S)\,.$$

Quindi il volume del cono E è

$$\mu(E) = \int_{P_2 E} \mu(E_z)\,dz = \int_0^h \Big(\frac{h - z}{h}\Big)^2 \mu(S)\,dz = \frac{1}{3}\,\mu(S)h\,,$$

ossia "area della base volte altezza diviso tre".

5 Cambiamento di variabili nell'integrale

Se $I = [a, b]$ è un intervallo in $\mathbb{R}$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile con derivata continua, qualora $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ sia continua possiamo scrivere la formula di integrazione per sostituzione

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du\,.$$

Si noti che $\varphi(I)$ è un intervallo i cui estremi potrebbero non coincidere con $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$. Questo si verifica invece se φ è strettamente monotona. In tal caso,

– se φ è strettamente crescente, si ha che $\varphi(a) < \varphi(b)$, $\varphi'(u) = |\varphi'(u)|$ e

$$\int_{\varphi(I)} f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\,;$$

– se φ è strettamente decrescente, allora $\varphi(a) > \varphi(b)$, $\varphi'(u) = -|\varphi'(u)|$ e

$$\int_{\varphi(I)} f = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\,.$$

Allora, se φ è strettamente monotona, la formula di integrazione per sostituzione si può scrivere come

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,dx = \int_I f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du\,.$$

Cercheremo ora di estendere tale formula in dimensione superiore.

Per iniziare, consideriamo il caso in cui f è costante di valore 1, per cui la formula diventa

$$\mu(\varphi(I)) = \int_I |\varphi'(u)|\,du\,.$$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione lineare, per cui esiste $\mathbb{A}$, una matrice 2×2, tale che $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$. Supponiamo che $\mathbb{A}$ sia invertibile. Se $I = [0, 1] \times [0, 1]$, allora $\varphi(I)$ è un parallelogramma, la cui area è $|\det \mathbb{A}|$. Quindi, se $I = [a, b] \times [c, d]$, avremo che

$$\mu(\varphi(I)) = |\det \mathbb{A}|\,\mu(I) = \int_I |\det \mathbb{A}|\,d\boldsymbol{u}\,.$$

Si noti che in questo caso la matrice jacobiana di φ è costante, $J\varphi(\boldsymbol{u}) = \mathbb{A}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, per cui abbiamo che

$$\mu(\varphi(I)) = \int_I |\det J\varphi(\boldsymbol{u})|\,d\boldsymbol{u}\,.$$

Questa formula si estende a un qualsiasi diffeomorfismo $\varphi : A \to B$, dove A e B sono due aperti di $\mathbb{R}^2$. Se I è un rettangolo contenuto in A, lo si può suddividere in molti piccoli sottorettangoli, su ciascuno dei quali la funzione φ sarà approssimata dalla ben nota formula

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}_0) + J\varphi(u_0)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) + r(\boldsymbol{u}),$$

che ci riporta a un'espressione lineare con $\mathbb{A} = J\varphi(u_0)$. Si può dimostrare che queste approssimazioni, con un procedimento al limite, forniscono la formula cercata.

Il procedimento descritto sopra si estende a ogni dimensione e si può dimostrare il seguente

Teorema 35 *Sia φ un diffeomorfismo tra due aperti A e $B = \varphi(A)$. Se D è un sottoinsieme limitato misurabile di A, allora $\varphi(D)$ è misurabile, $|\det J\varphi|$ è integrabile su D e si ha:*

$$\mu(\varphi(D)) = \int_D |\det J\varphi(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}.$$

Possiamo ora passare al caso generale, con f una funzione non necessariamente costante. Enunciamo il **teorema di cambiamento di variabili** nell'integrale.

Teorema 36 *Siano φ un diffeomorfismo tra due aperti A e $B = \varphi(A)$ di $\mathbb{R}^N$, D un sottoinsieme limitato misurabile di A e $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è L-integrabile su $\varphi(D)$ se e solo se $(f \circ \varphi)|\det J\varphi|$ è L-integrabile su D, nel qual caso si ha:*

$$\int_{\varphi(D)} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_D f(\varphi(\boldsymbol{u}))\, |\det J\varphi(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}.$$

Potrebbe essere utile la seguente formula equivalente:

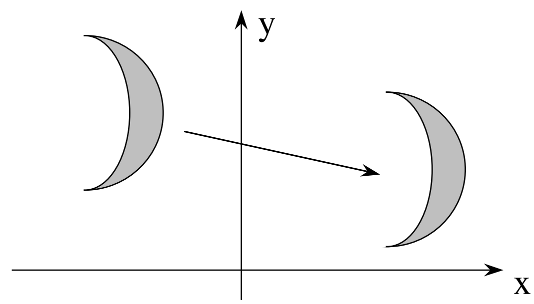
$$\int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(\boldsymbol{u}))\, |\det J\varphi(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}.$$

6 Alcune trasformazioni utili in $\mathbb{R}^2$

Ci sono alcune trasformazioni che lasciano invariata la misura di ogni insieme misurabile. Ne consideriamo qui alcune delle più usate nella pratica.

Le traslazioni. Si dice traslazione, per mezzo di un vettore fissato $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, la trasformazione definita da

$$\varphi(u, v) = (u + a_1, v + a_2).$$



Si vede immediatamente che φ è un diffeomorfismo con $\det J\varphi = 1$, per cui, dati un insieme limitato misurabile D e una funzione L-integrabile f su $\varphi(D)$, si ha:

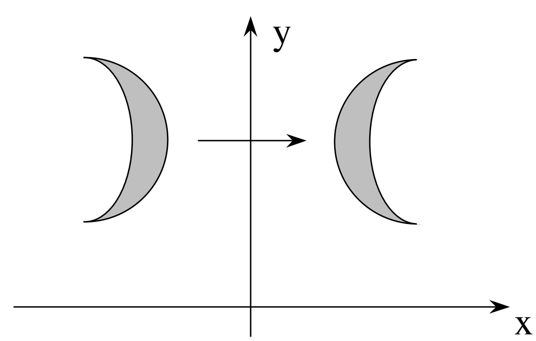
$$\int_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(u+a_1, v+a_2)\,du\,dv\,.$$

Le riflessioni. Una riflessione rispetto ad un asse è definita da:

$$\varphi(u,v) = (-u,v)\,, \qquad \text{oppure} \qquad \varphi(u,v) = (u,-v)\,.$$

Qui $\det J\varphi = -1$, per cui, ad esempio nel primo caso, si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(-u,v)\,du\,dv\,.$$



Le rotazioni. Una rotazione attorno all'origine di un angolo fissato α è definita da:

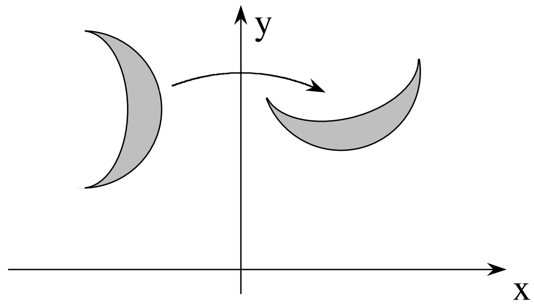
$$\varphi(u,v) = (u\cos\alpha - v\sin\alpha\,,\ u\sin\alpha + v\cos\alpha)\,.$$

Si tratta di un diffeomorfismo, con

$$\det J\varphi(u,v) = \det\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1\,.$$

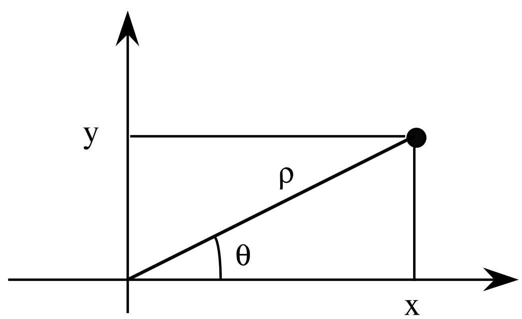
Quindi, dati un insieme limitato misurabile D e una funzione L-integrabile f su $\varphi(D)$, si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(u\cos\alpha - v\sin\alpha\,,\ u\sin\alpha + v\cos\alpha)\,du\,dv\,.$$



Un altro tipo di trasformazione utile è la funzione $\psi : [0,+\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ data da

$$\psi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,,$$



che definisce le note coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Consideriamo gli insiemi aperti

$$A =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\,, \qquad B = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\})\,.$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho,\theta) = \psi(\rho,\theta)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det J\varphi(\rho,\theta) = \rho$.

Preso un sottoinsieme limitato misurabile E di $\mathbb{R}^2$, sia $\widetilde{E} = E \cap B$. Si noti che $\widetilde{E}$ differisce da E per un insieme trascurabile. Inoltre, anche $\varphi^{-1}(\widetilde{E})$ differisce da $\psi^{-1}(E)$ per un insieme trascurabile. Applicando il teorema di cambiamento di variabili, troviamo che vale la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate polari**:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\psi^{-1}(E)} f(\psi(\rho,\theta))\rho\,d\rho\,d\theta\,.$$

Esempio. Sia $f(x,y) = xy$ definita su

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 < 9\}\,.$$

Facendo il cambiamento di variabili in coordinate polari, si vede che $\psi^{-1}(E) = [0,3[\times[0,\frac{\pi}{2}]$; per la formula di riduzione di Fubini, possiamo quindi scrivere

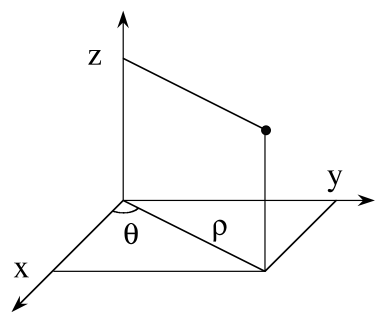
$$\int_E f = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 \rho^3 \cos\theta \sin\theta\,d\rho \right) d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{81}{8}\ .$$

7 Coordinate cilindriche e sferiche in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo la funzione $\xi : [0, +\infty[\, \times [0, 2\pi[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\xi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z)\,,$$

che definisce le coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo gli insiemi aperti



$$A =]0, +\infty[\, \times\,]0, 2\pi[\, \times \mathbb{R}\,, \qquad B = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty[\, \times \{0\} \times \mathbb{R})\,.$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho, \theta, z) = \xi(\rho, \theta, z)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det J\varphi(\rho, \theta, z) = \rho$.

Preso un sottoinsieme limitato misurabile E di $\mathbb{R}^3$, sia $\widetilde{E} = E \cap B$. Si noti che $\widetilde{E}$ differisce da E per un insieme trascurabile. Inoltre, anche $\varphi^{-1}(\widetilde{E})$ differisce da $\xi^{-1}(E)$ per un insieme trascurabile. Applicando il teorema di cambiamento di variabili, troviamo che vale la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate cilindriche**:

$$\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\xi^{-1}(E)} f(\xi(\rho, \theta, z))\rho\, d\rho\, d\theta\, dz\,.$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale $\int_E f$, dove $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le x + y + \sqrt{2}\}\,.$$

Passando a coordinate cilindriche, notiamo che

$$\rho \cos\theta + \rho \sin\theta + \sqrt{2} \ge 0\,,$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$ e ogni $\rho \in [0, 1]$. Facendo il cambio di variabili e usando

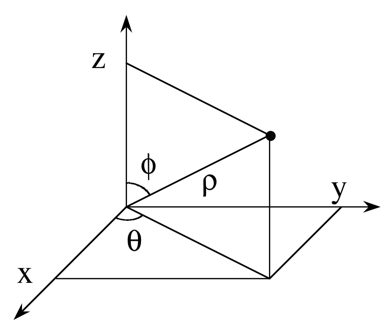
Fubini, si ha:

$$\begin{aligned}\int_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_{\xi^{-1}(E)} \rho^3\,dz\,d\theta\,d\rho \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+\sqrt{2}} \rho^3\,dz \right) d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+\sqrt{2})\,d\theta \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^3\sqrt{2}\,d\rho \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.\end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione $\sigma : [0,+\infty[\,\times[0,\pi[\,\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,,$$

che definisce le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo gli insiemi aperti



$$A =]0,+\infty[\,\times\,]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[\,, \qquad B = \mathbb{R}^3 \setminus ([0,+\infty[\,\times\{0\}\times\mathbb{R})\,.$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho,\phi,\theta) = \sigma(\rho,\phi,\theta)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det J\varphi(\rho,\phi,\theta) = \rho^2\sin\phi$. Si noti che $\sin\phi > 0$, in quanto $\phi \in]0,\pi[$.

Preso un sottoinsieme limitato misurabile E di $\mathbb{R}^3$, sia $\widetilde{E} = E\cap B$. Si noti che $\widetilde{E}$ differisce da E per un insieme trascurabile. Inoltre, anche $\varphi^{-1}(\widetilde{E})$ differisce da $\sigma^{-1}(E)$ per un insieme trascurabile. Applicando il teorema di cambiamento di variabili, troviamo che vale la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate sferiche**:

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\sigma^{-1}(E)} f(\sigma(\rho,\theta,\phi))\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi\,.$$

Esempio. Calcoliamo il volume dell'insieme

$$E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \int_E 1\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_{\sigma^{-1}(E)} \rho \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi\, d\theta \right) d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin\phi\, d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^1 \rho\, d\rho \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{2\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

8 Integrazione su intervalli non compatti

Cominciamo con il considerare una funzione $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, dove $b \leq +\infty$. Supporremo che f sia integrabile su ogni intervallo compatto del tipo $[a,c]$, con $c \in]a,b[$. Questo accade, ad esempio, quando f è continua su $[a,b[$.

Definizione 37 *Diremo che una funzione $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a,b[$ se f è integrabile su $[a,c]$ per ogni $c \in]a,b[$ e se il limite*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f$$

esiste ed è finito. In tal caso, il limite si dirà l'integrale di f su $[a,b[$ e si indicherà con $\int_a^b f$ o con $\int_a^b f(x)\, dx$.

In particolare, se $b = +\infty$, scriveremo:

$$\int_a^{+\infty} f\,, \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

Esempi. Sia $a > 0$; si vede che la funzione $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^{-\alpha}$ è integrabile su $[a,+\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$, nel qual caso si ha

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\,.$$

D'altra parte, siano $a < b < +\infty$. Si verifica che la funzione $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (b-x)^{-\beta}$ è integrabile su $[a,b[$ se e solo se $\beta < 1$, nel qual caso si ha

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\beta} = \frac{(b-a)^{1-\beta}}{1-\beta}\,.$$

Spesso si parla di integrale generalizzato o improprio quando si considerano funzioni definite su intervalli non compatti. Si usa dire che l'integrale converge se la funzione f è integrabile su $[a, b[$, ossia quando il limite $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f$ esiste ed è finito. Se il limite non esiste, si dice che l'integrale è indeterminato. Se esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$, si dice che l'integrale diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, rispettivamente.

È chiaro che la convergenza dell'integrale dipende solamente dal comportamento della funzione nelle vicinanze del punto b. Pertanto, è possibile modificare la funzione al di fuori di un intorno di b senza che la convergenza dell'integrale ne risenta.

La definizione data è giustificata, nel caso $b < +\infty$, dal teorema seguente, dovuto a H. Hake.

Teorema 38 *Sia $b < +\infty$, e sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$, per ogni $c \in]a, b[$. La funzione f è integrabile su $[a, b[$ se e solo se f è la restrizione di una funzione $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$, integrabile su $[a, b]$. In tal caso si ha*

$$\int_a^b \bar{f} = \int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f \, .$$

Andiamo ora a enunciare il **criterio di convergenza di Cauchy**.

Teorema 39 *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$, per ogni $c \in]a, b[$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia integrabile su $[a, b[$ è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un $\bar{c} \in]a, b[$ tale che, essendo c' e c'' due numeri qualsiasi in $[\bar{c}, b[$, si abbia che $|\int_{c'}^{c''} f| \leq \varepsilon$.*

Dal criterio di Cauchy deduciamo il seguente **criterio del confronto**.

Teorema 40 *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$, per ogni $c \in]a, b[$. Se esiste una funzione $g : [a, b[\to \mathbb{R}$, integrabile su $[a, b[$, tale che, per ogni $x \in [a, b[$,*

$$|f(x)| \leq g(x) \, ,$$

allora f è anch'essa integrabile su $[a, b[$.

<u>Dimostrazione</u>. Preso $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{c} \in]a, b[$ tale che, comunque presi c', c'' in $[\bar{c}, b[$, si ha $|\int_{c'}^{c''} g| \leq \varepsilon$. Se per esempio $c' \leq c''$, essendo $-g \leq f \leq g$, si ha che

$$-\int_{c'}^{c''} g \leq \int_{c'}^{c''} f \leq \int_{c'}^{c''} g \, ,$$

e quindi

$$\left| \int_{c'}^{c''} f \right| \leq \int_{c'}^{c''} g \leq \varepsilon \, .$$

Vale pertanto il criterio di Cauchy, e quindi si ha la tesi. ■

Come conseguenza immediata, abbiamo il seguente

Corollario 41 *Sia* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile su* $[a,c]$, *per ogni* $c \in]a,b[$. *Se* $|f|$ *è integrabile su* $[a,b[$, *allora anche* f *lo è, e si ha*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \, .$$

Nel caso in cui sia f che $|f|$ siano integrabili su $[a,b[$, si dirà che f è L-integrabile, o assolutamente integrabile, su $[a,b[$.

Esempio. Consideriamo la funzione $f : [\pi,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Vedremo che essa è integrabile su $[a,+\infty[$, ma ivi non assolutamente integrabile. Per vedere che è integrabile, prendiamo un $c > \pi$ e integriamo per parti:

$$\int_\pi^c \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_\pi^c - \int_\pi^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx \, .$$

Si trova che

$$\lim_{c\to+\infty} \int_\pi^c f = -\frac{1}{\pi} - \lim_{c\to+\infty} \int_\pi^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx \, ,$$

e quest'ultimo limite è finito per il teorema del confronto, in quanto $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq x^{-2}$. Quindi f è integrabile. Supponiamo per assurdo che sia anche assolutamente integrabile. In tal caso, per ogni intero $n \geq 2$, si avrebbe

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \, .
\end{aligned}$$

Ma ciò non può essere, poiché la serie $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1}$ è divergente.

Enunciamo ora un corollario del teorema del confronto che trova spesso applicazione nella pratica.

Corollario 42 *Siano* $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *due funzioni a valori positivi, integrabili su* $[a,c]$ *per ogni* $c \in]a,b[$. *Supponiamo che esista il limite*

$$L = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \, .$$

Abbiamo le seguenti conclusioni:
a) se $L = 0$ *e* g *è integrabile su* $[a,b[$, *allora lo è anche* f;
b) se $0 < L < +\infty$, *allora* f *è integrabile su* $[a,b[$ *se e solo se lo è* g;
c) se $L = +\infty$ *e* g *non è integrabile su* $[a,b[$, *nemmeno* f *lo è.*

Esempio. Consideriamo la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{1/(x^2+1)} - 1$. Come funzione di confronto vorrei prendere $g(x) = x^{-2}$. Si presenta però un problema tecnico, in quanto g non è definita su $[0, +\infty[$. Si può procedere in due modi: o si restringe f ad un intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 0$, e si osserva che questa operazione non modifica la convergenza o meno dell'integrale, in quanto f è continua su $[0, a]$; oppure si adatta alla situazione la funzione g : ad esempio, si può scegliere

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1]\,, \\ x^{-2} & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Fatto ciò, si vede che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} x^2 (e^{1/(x^2+1)} - 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \frac{e^{1/(x^2+1)} - 1}{1/(x^2+1)} = 1\,.$$

Siccome g è integrabile, lo è anche f.

Dimostriamo ora un teorema che mette in luce lo stretto legame che intercorre tra la teoria delle serie e quella dell'integrale generalizzato.

Teorema 43 *Sia* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione positiva, decrescente e integrabile su* $[1, c]$, *per ogni* $c > 1$. *Allora* f *è integrabile su* $[1, +\infty[$ *se e solo se converge la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. *Inoltre, si ha*

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Per $x \in [k, k+1]$, si ha $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Quindi

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)\,.$$

Sommando, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)\,.$$

La tesi segue ora dal fatto che, essendo f positiva, la successione $(\sum_{k=1}^{n} f(k))_n$ e la funzione $c \mapsto \int_1^c f$ sono entrambe crescenti e perciò hanno limite, e dal teorema del confronto dei limiti. ■

Osservazioni. È chiaro che la scelta $a = 1$ nel teorema ora dimostrato non è affatto determinante. Notiamo inoltre che questo teorema viene spesso usato per determinare la convergenza di una serie, ottenendo la stima

$$\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f\,.$$

Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$; si ha:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx\,,$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2}\,.$$

Una maggiore accuratezza si ottiene facilmente sommando un certo numero di addendi iniziali e poi usando la stima dell'integrale. Ad esempio, separando i primi due addendi iniziali, si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,,$$

con

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{27} + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx\,.$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{255}{216} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{263}{216}\,.$$

Consideriamo ora una funzione $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, con $a \geq -\infty$. Si ha un'analoga definizione del suo integrale generalizzato.

Definizione 44 *Diremo che una funzione $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $]a,b]$ se f è integrabile su $[c,b]$ per ogni $c \in]a,b[$ e se il limite*

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f$$

esiste ed è finito. In tal caso, il limite si dirà l'integrale di f su $]a,b]$ e si indicherà con $\int_a^b f$ o con $\int_a^b f(x)\,dx$.

Data la funzione $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, si può considerare la funzione $g : [a',b'[\to \mathbb{R}$, con $a' = -b$ e $b' = -a$, definita da $g(x) = f(-x)$. Si vede facilmente che f è integrabile su $]a,b]$ se e solo se g è integrabile su $[a',b'[$. In tal modo ci si riconduce alla teoria precedente.

Definiremo inoltre l'integrale di una funzione $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, in questo modo:

Definizione 45 *Diremo che una funzione $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $]a,b[$ se, fissato $p \in]a,b[$, f è integrabile su $[p,b[$ e su $]a,p]$. In tal caso, l'integrale di f su $]a,b[$ è definito da*

$$\int_a^b f = \int_a^p f + \int_p^b f\,.$$

Si verifica facilmente che la definizione data sopra non dipende dalla scelta di $p \in]a, b[$.

Esempio. Se $a, b \in \mathbb{R}$, si può verificare che la funzione $f(x) = ((x-a)(b-x))^{-\beta}$ è integrabile su $]a, b[$ se e solo se $\beta < 1$. In questo caso, si può scegliere, ad esempio, $p = (a + b)/2$. Possiamo anche considerare il caso in cui $a = -\infty$ e $b = +\infty$. Ad esempio, si verifica facilmente che la funzione $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ è integrabile su $] - \infty, +\infty[$. Prendendo ad esempio $p = 0$, si trova:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi \,.$$

Un altro caso che si può presentare nella pratica è quello di una funzione che non sia definita in un punto interno ad un intervallo.

Definizione 46 *Dati $a < q < b$, diremo che una funzione*

$$f : [a, b] \setminus \{q\} \to \mathbb{R}$$

è integrabile su $[a, b] \setminus \{q\}$ se f è integrabile su $[a, q[$ e su $]q, b]$. In tal caso, si pone

$$\int_a^b f = \int_a^q f + \int_q^b f \,.$$

Ad esempio, se $a < 0 < b$, la funzione $f(x) = 1/x$ non è integrabile su $[a, b] \setminus \{0\}$, anche se in questo caso la disparità della funzione potrebbe portare a definire nullo l'integrale su intervalli simmetrici rispetto all'origine. Così facendo, però, si perderebbero alcune importanti proprietà dell'integrale, come l'additività su sottointervalli.

Varie situazioni possono essere trattate come combinazioni di quelle sopra considerate. Non ritengo necessario approfondire ulteriormente la questione; sarà il buon senso a dettare nei singoli casi la scelta dell'approccio più adeguato.

9 Integrale su sottoinsiemi non limitati

Useremo la notazione

$$B[0, r] = [-r, r] \times [-r, r] \times \cdots \times [-r, r] \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, non necessariamente limitato, e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata tale che

$$f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \,, \text{ per ogni } \boldsymbol{x} \in E \,.$$

Se f è integrabile su ciascun insieme limitato $E \cap B[0, r]$, con $r > 0$, si definisce

$$\int_E f = \lim_{r \to +\infty} \int_{E \cap B[0,r]} f \,.$$

Si noti che il limite esiste sempre, siccome la funzione $r \mapsto \int_{E\cap B[0,r]} f$ è crescente, essendo $f \geq 0$. Inoltre, il risultato non cambia se al posto di $B[0,r]$ si considera la palla euclidea $B(0,r)$, o una qualsiasi famiglia crescente di insiemi che invadono $\mathbb{R}^2$. Qualora tale limite risulti finito, la funzione f si dirà "integrabile" su E.

Nel caso in cui la funzione assuma anche valori negativi, procediamo in questo modo. Definiamo le funzioni $f^{\pm} : E \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f^+(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}), 0\}\,, \qquad f^-(\boldsymbol{x}) = \max\{-f(\boldsymbol{x}), 0\}\,,$$

per cui $f(\boldsymbol{x}) = f^+(\boldsymbol{x}) - f^-(\boldsymbol{x})$. Si noti che $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$. Se ben definito, si pone quindi

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- .$$

In tal caso, f si dirà "L-integrabile". Osserviamo infatti che $|f(\boldsymbol{x})| = f^+(\boldsymbol{x}) + f^-(\boldsymbol{x})$, quindi se f^+ e f^- sono integrabili, avremo anche

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- .$$

Si dimostra senza grosse difficoltà che l'insieme delle funzioni L-integrabili è uno spazio vettoriale, e l'integrale è una funzione lineare su di esso che conserva l'ordine.

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice "misurabile" se $E \cap B[0,r]$ è misurabile, per ogni $r > 0$. In tal caso, si pone

$$\mu(E) = \lim_{r\to+\infty} \mu(E \cap B[0,r])\,.$$

Si noti che il valore $\mu(E)$ può essere in alcuni casi $+\infty$. Esso è finito se e solo se la funzione costante 1 è L-integrabile su E, ossia la funzione caratteristica di E è L-integrabile su $\mathbb{R}^N$. Le proprietà degli insiemi limitati misurabili si estendono facilmente agli insiemi illimitati. In particolare, sono misurabili tutti gli insiemi aperti e tutti i chiusi.

Anche il **teorema di riduzione** di G. Fubini si estende a funzioni definite su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ non necessariamente limitato. Sia $N = N_1 + N_2$ e scriviamo $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Per ogni $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, consideriamo le "sezioni" di E :

$$E_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_2} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E\}\,, \qquad E_{\boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N_1} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E\}\,,$$

e le "proiezioni" di E :

$$P_1E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N_1} : E_{\boldsymbol{x}} \neq \emptyset\}\,, \qquad P_2E = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_2} : E_{\boldsymbol{y}} \neq \emptyset\}\,,$$

Possiamo allora riformulare il teorema nella forma seguente.

Teorema 47 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione L-integrabile sull'insieme E. Allora:*
(i) per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in P_1E$, la funzione $f(\boldsymbol{x}, \cdot)$ è L-integrabile sull'insieme $E_{\boldsymbol{x}}$;
(ii) la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \int_{E_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$, definita quasi ovunque su P_1E, è ivi L-integrabile;
(iii) si ha:

$$\int_E f = \int_{P_1E} \left(\int_{E_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x}\,.$$

Analogamente, la funzione $\boldsymbol{y} \mapsto \int_{E_{\boldsymbol{y}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}$, definita quasi ovunque su P_2E, è ivi L-integrabile, e si ha:

$$\int_E f = \int_{P_2E} \left(\int_{E_{\boldsymbol{y}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y}\,.$$

Corollario 48 *Sia E un insieme misurabile. Allora E ha misura finita se e solo se:*
(i) per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in P_1E$, l'insieme $E_{\boldsymbol{x}}$ è misurabile e ha misura finita;
(ii) la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(E_{\boldsymbol{x}})$, definita quasi ovunque su P_1E, è ivi L-integrabile;
(iii) si ha:

$$\mu(E) = \int_{P_1E} \mu(E_{\boldsymbol{x}})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Con enunciato simmetrico, se E ha misura finita, si ha pure

$$\mu(E) = \int_{P_2E} \mu(E_{\boldsymbol{y}})\, d\boldsymbol{y}\,.$$

La **formula di cambiamento di variabili nell'integrale** si estende anch'essa ad insiemi non limitati, con enunciato analogo.

Teorema 49 *Siano φ un diffeomorfismo tra due aperti A e $B = \varphi(A)$ di $\mathbb{R}^N$, D un sottoinsieme misurabile di A e $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è L-integrabile su $\varphi(D)$ se e solo se $(f \circ \varphi)|\det J\varphi|$ è L-integrabile su D, nel qual caso si ha:*

$$\int_{\varphi(D)} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_D f(\varphi(\boldsymbol{u}))|\det J\varphi(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Si possono fare le stesse considerazioni per quanto riguarda i cambiamenti di variabili in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$ o in coordinate cilindriche o sferiche in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ e $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_E \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= 2\pi \int_1^{+\infty} \rho^{1-2\alpha}\, d\rho\,.\end{aligned}$$

Si vede quindi che f è integrabile su E se e solo se $\alpha > 1$, nel qual caso l'integrale vale $\frac{\pi}{\alpha - 1}$.

Esempio 2. Calcoliamo la misura tridimensionale dell'insieme

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, \sqrt{y^2+z^2} \leq \frac{1}{x} \right\} .$$

Usando Fubini, raggruppando le variabili (y,z) abbiamo

$$\mu(E) = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2}\, dx = \pi .$$

Esempio 3. Consideriamo la funzione $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e facciamo un cambiamento di variabili in coordinate polari:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \pi .$$

Notiamo che, usando il Teorema di Fubini, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2 , \end{aligned}$$

per cui ritroviamo il risultato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} .$$

Terminiamo con la **proprietà di additività** dell'integrale.

Teorema 50 *Siano $E_1, \dots, E_n$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$, a due a due non sovrapposti (ossia $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ se $i \neq j$), la cui unione è un insieme E. Allora $f : E \to \mathbb{R}$ è L-integrabile su E se e solo se f è L-integrabile su ciascuno degli $E_1, \dots, E_n$, e in tal caso, si ha*

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \cdots + \int_{E_n} f .$$

10 Le M-superfici

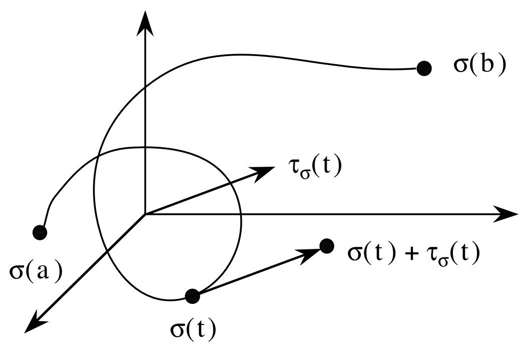
Indichiamo con I un rettangolo di $\mathbb{R}^M$, dove $1 \leq M \leq N$.

Definizione 51 *Chiameremo M-**superficie in** $\mathbb{R}^N$ una funzione [1] $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ di classe $\mathcal{C}^1$. Se $M = 1$, σ si dirà anche* **curva***; se $M = 2$, si dirà semplicemente* **superficie***. L'insieme $\sigma(I)$ è detto* **supporto** *della M-superficie σ. Diremo che la M-superficie σ è* **regolare** *se, per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathring{I}$, la matrice jacobiana $J\sigma(\boldsymbol{u})$ ha rango M.*

[1] Le derivate parziali di σ devono essere continue su tutto I e nei punti di frontiera vanno intese, se necessario, come derivate destre o sinistre. Equivalentemente, si potrebbe estendere σ ad una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita su un aperto contenente I.

Consideriamo da vicino il caso $N = 3$. Una curva in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La curva è regolare se, per ogni $t \in]a,b[$, il vettore $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), \sigma_3'(t))$ è non nullo. In tal caso, si definisce il seguente **versore tangente** nel punto $\sigma(t)$:

$$\tau_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{||\sigma'(t)||}\,.$$



Esempio. La curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = (R\cos(2t), R\sin(2t), 0)$$

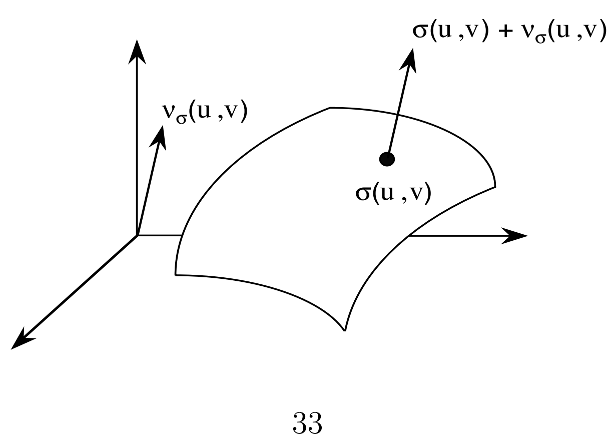
ha come supporto la circonferenza

$$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$$

(che viene percorsa due volte). Essendo $\sigma'(t) = (-2R\sin(2t), 2R\cos(2t), 0)$, si tratta di una curva regolare, e si ha:

$$\tau_\sigma(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), 0)\,.$$

Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$. La superficie è regolare se, per ogni $(u,v) \in]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[$, i vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ sono linearmente indipendenti. In tal caso, essi individuano un piano, detto **piano tangente** alla superficie nel punto $\sigma(u,v)$, e si definisce il seguente **versore normale**:



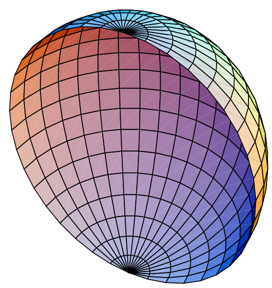
$$\nu_\sigma(u,v) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)||}\,.$$

Esempi. 1. La superficie $\sigma : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi,\theta) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$$

ha come supporto la semisfera

$$\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2, y \geq 0\}\,.$$



Essendo

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\phi,\theta) = (R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, -R\sin\phi)\,,$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\phi,\theta) = (-R\sin\phi\sin\theta, R\sin\phi\cos\theta, 0)\,,$$

si tratta di una superficie regolare, e si ha:

$$\nu_\sigma(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\,.$$

2. La superficie $\sigma : [r,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 \leq r < R$, data da

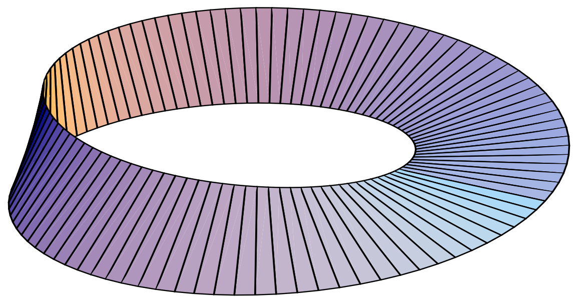
$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 0)\,,$$

ha come supporto un cerchio se $r = 0$, una corona circolare se $r > 0$. È una superficie regolare.

3. La superficie $\sigma : [r,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 < r < R$, definita da

$$\begin{aligned}\sigma(u,v) = \Bigg(&\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos v,\\ &\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin v,\\ &\left(u - \frac{r+R}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg)\,,\end{aligned}$$

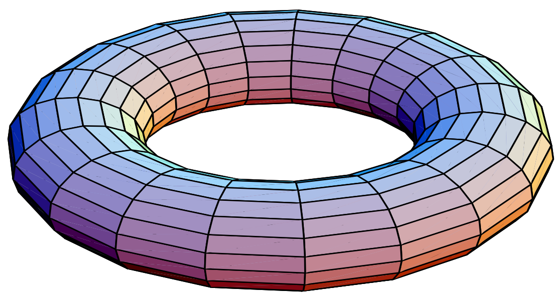
ha comes supporto un nastro di Möbius. È anch'essa una superficie regolare.



4. La superficie $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

dove $0 < r < R$, ha come supporto l'anello toroidale o "toro"



$$\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}\,.$$

Si può verificare che anche in questo caso si tratta di una superficie regolare.

Una 3-superficie in $\mathbb{R}^3$ si dice anche **volume**.

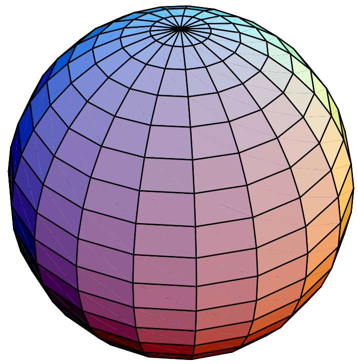
Esempio. La funzione $\sigma : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$$

ha come supporto la palla chiusa

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}\,.$$

In questo caso, $\det\sigma'(\rho, \phi, \theta) = \rho^2\sin\phi$ e pertanto si tratta di un volume regolare.



11 Integrale su una M-superficie

Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ una M-superficie, con $1 \leq M \leq N$. Possiamo considerare, al variare degli indici $i_1, \dots, i_M$, le matrici $M \times M$ che si ottengono selezionando dalla matrice jacobiana $J\sigma(\boldsymbol{u})$ le corrispondenti righe

$$\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \dots & \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \dots & \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}.$$

Definiamo, per ogni $\boldsymbol{u} \in I$, i vettori $\binom{N}{M}-$dimensionali

$$\Sigma(\boldsymbol{u}) = \left(\det \sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\right)_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}.$$

Indicheremo con $\|\Sigma(\boldsymbol{u})\|$ la norma euclidea di $\Sigma(\boldsymbol{u})$:

$$\|\Sigma(\boldsymbol{u})\| = \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \left(\det \sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\right)^2\right]^{1/2}.$$

Definizione 52 *La funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è integrabile sulla M-superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ se $(f \circ \sigma)\|\Sigma\|$ è integrabile su I. In tal caso, si pone*

$$\int_\sigma f = \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))\|\Sigma(\boldsymbol{u})\|\, d\boldsymbol{u}.$$

Ad esempio, ogni funzione continua f sarà integrabile su σ.

Nel caso $M = 1$, abbiamo una curva $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$\int_\sigma f = \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\, dt.$$

Se $M = 2$ e $N = 3$, abbiamo una superficie $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$\int_\sigma f = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv.$$

Definizione 53 *Due M-superfici $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ si dicono* **equivalenti** *se hanno lo stesso supporto ed esistono due insiemi aperti $A \subseteq I$, $B \subseteq J$, e un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le seguenti proprietà: gli insiemi $I \setminus A$ e $J \setminus B$ sono trascurabili e, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$, $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))$.*

L'integrale non differisce per M-superfici equivalenti.

Teorema 54 *Se σ e $\tilde{\sigma}$ sono due M-superfici equivalenti, si ha:*

$$\int_\sigma f = \int_{\tilde{\sigma}} f \,.$$

Dimostrazione. Con le notazioni introdotte in precedenza, essendo $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))$ con $\varphi : A \to B$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{u}) &= \left(\det \sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\right)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N} \\
&= \left(\det \left(\tilde{\sigma}'_{(i_1,\dots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\varphi'(\boldsymbol{u})\right)\right)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N} \\
&= \left(\det \tilde{\sigma}'_{(i_1,\dots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\right)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N} \det \varphi'(\boldsymbol{u}) \\
&= \tilde{\Sigma}(\varphi(\boldsymbol{u})) \det \varphi'(\boldsymbol{u}) \,.
\end{aligned}$$

Pertanto, per il teorema di cambiamento di variabili, essendo $I \setminus A$ e $J \setminus B$ trascurabili, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_A f(\sigma(\boldsymbol{u}))\|\Sigma(\boldsymbol{u})\| \, d\boldsymbol{u} \\
&= \int_A f(\tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u})))\|\tilde{\Sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))\| \, |\det \varphi'(\boldsymbol{u})| \, d\boldsymbol{u} \\
&= \int_B f(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}))\|\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{v})\| \, d\boldsymbol{v} = \int_{\tilde{\sigma}} f \,.
\end{aligned}$$

■

Come vedremo in seguito, non sempre due M-superfici aventi lo stesso supporto sono equivalenti. Introduciamo una classe particolare di M-superfici per le quali questo inconveniente non si verifica.

Definizione 55 *Una M-superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ è una* **M-parametrizzazione** *di un insieme $\mathcal{M}$ se è regolare, iniettiva su $\mathring{I}$, e $\sigma(I) = \mathcal{M}$. Diremo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ è* **M-parametrizzabile** *se esiste una sua M-parametrizzazione.*

Esempi. La circonferenza $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è parametrizzabile e $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, ne è una parametrizzazione.

Una parametrizzazione della sfera $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è, ad esempio, $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) \,.$$

Teorema 56 *Due M-parametrizzazioni di uno stesso insieme sono sempre equivalenti.*

Se $\mathcal{M}$ è un insieme M-parametrizzabile, possiamo definire l'integrale di f su $\mathcal{M}$ ponendolo uguale a $\int_\sigma f$, dove σ è una qualunque parametrizzazione di $\mathcal{M}$. Lo denoteremo con

$$\int_{\mathcal{M}} f\, d\mu_M\,, \qquad \text{oppure} \qquad \int_{\mathcal{M}} f(x)\, d\mu_M(x)\,.$$

Se $M = N$, si riottiene l'integrale usuale, ossia $\int_{\mathcal{M}} f(x)\, dx$.

12 Misura M-dimensionale

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in accordo con l'idea fisica del moto di una particella lungo un percorso descritto dalla funzione σ, in questo caso l'integrale di linea si chiama **lunghezza** (o misura curvilinea) della curva σ, e si scrive:

$$\iota_1(\sigma) = \int_a^b ||\sigma'(t)||\, dt\,.$$

Esempio. Sia $\sigma : [0, b] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$. Il suo supporto è un arco di parabola, e la sua lunghezza è data da:

$$\begin{aligned}
\iota_1(\sigma) &= \int_0^b \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt \\
&= \int_{\sinh^{-1}(0)}^{\sinh^{-1}(2b)} \frac{1}{2}(\cosh u)^2\, du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u + \sinh u \cosh u}{2}\right]_0^{\sinh^{-1}(2b)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sinh^{-1}(2b) + 2b\sqrt{1 + 4b^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2b + \sqrt{1 + 4b^2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{1 + 4b^2}\,.
\end{aligned}$$

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in questo caso si chiama **area** (o misura superficiale) della superficie σ il seguente integrale:

$$\iota_2(\sigma) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv\,.$$

Nel caso in cui la superficie risulti essere una 2-parametrizzazione di un certo insieme, questo integrale è il flusso di un campo di vettori che in ogni punto della superficie coincide con il versore normale.

Esempio. Sia $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi) \, .$$

Il suo supporto è una sfera di raggio R, e la sua area è data da:

$$\begin{aligned}\iota_2(\sigma) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{(R^2 \sin^2\phi \cos\theta)^2 + (R^2 \sin^2\phi \sin\theta)^2 + (R^2 \sin\phi \cos\theta)^2} \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 4\pi R^2 \, .\end{aligned}$$

In generale, nel caso in cui f è costantemente uguale a 1 abbiamo la seguente

Definizione 57 *Si dice* **misura M-superficiale** *di una M-superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ il seguente integrale:*

$$\iota_M(\sigma) = \int_I ||\Sigma(\boldsymbol{u})|| \, d\boldsymbol{u} \, .$$

Come ragionevolmente ci si aspetta, da quanto visto sopra segue immediatamente che due M-superfici equivalenti hanno sempre la stessa misura M-superficiale.

Esempio. Le due curve $\sigma, \tilde{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \, , \quad \tilde{\sigma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \, ,$$

pur avendo lo stesso supporto, non sono equivalenti. Infatti, come facilmente si vede, $\iota_1(\sigma) = 2\pi$ mentre $\iota_1(\tilde{\sigma}) = 4\pi$.

Alla luce di quanto sopra, è possibile dare la seguente

Definizione 58 *Si chiama* **misura M-dimensionale** *di un insieme M-parametrizzabile $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ la misura M-superficiale di una qualunque sua M-parametrizzazione.*

Nei casi $M = 1, 2$, la misura M-dimensionale di $\mathcal{M}$ si chiama spesso **lunghezza** o **area** di $\mathcal{M}$, rispettivamente. Si potrà parlare, ad esempio, di lunghezza di una circonferenza e di area di una sfera.

Se $M = N$, si può verificare che la misura N-dimensionale dell'insieme $\mathcal{M}$ coincide con la misura usuale che abbiamo trattato nella prima parte di queste note.

13 Lunghezza e area

Consideriamo dapprima una curva $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$. Per ogni partizione $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[a,b]$ del tipo

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b\,,$$

calcoliamo la lunghezza della poligonale che congiunge i punti $\sigma(a_j)$:

$$\ell(\sigma,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \|\sigma(a_j) - \sigma(a_{j-1})\|\,.$$

Risulta abbastanza intuitivo che queste lunghezze possono essere assunte come una buona approssimazione della lunghezza della curva σ, qualora i punti della partizione vengano presi sufficientemente vicini l'uno all'altro. Si può in effetti dimostrare che

$$\iota_1(\sigma) = \sup\left\{\ell(\sigma,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition of } [a,b]\right\}.$$

Viene ora da chiedersi se un risultato analogo possa essere ottenuto anche per le superfici. In un autorevole libro francese sul calcolo differenziale e integrale del 1880 si trova questa affermazione:

"Sia una porzione di superficie curva limitata da un contorno C. Chiameremo area di questa superficie il limite S verso il quale tende l'area di una superficie poliedrale iscritta formata da facce triangolari e limitata da un contorno poligonale avente per limite il contorno C. Occorre dimostrare che il limite esiste ed è indipendente dalla legge secondo la quale decrescono le facce della superficie poligonale iscritta."

Ebbene, come dimostrato indipendentemente da Schwarz e da Peano, questa affermazione è falsa. Cercheremo ora di capire perché.

Consideriamo la superficie laterale di un cilindro con base circolare di raggio r e altezza h. La parametrizziamo in coordinate cilindriche, per mezzo della funzione $\sigma : [0,2\pi] \times [0,h] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,.$$

La sua area, come facilmente si vede, è uguale a $2\pi rh$.

La "lanterna di Schwarz" è un poliedro, avente $4mn$ facce triangolari, inscritto nel suddetto cilindro. I vertici del poliedro corrispondono ai punti che si ottendono suddividendo il dominio in nm sottorettangoli

$$\left[(j-1)\frac{2\pi}{m}\,,\, j\frac{2\pi}{m}\right] \times \left[(k-1)\frac{h}{n}\,,\, k\frac{h}{n}\right], \qquad \text{con } j = 1,\dots,m\,,\ k = 1,\dots,n\,,$$

e poi dividendo ciascuno di essi, per mezzo delle loro due diagonali, in quattro triangoli uguali. Indicheremo con $A(m,n)$ l'area di questo poliedro.

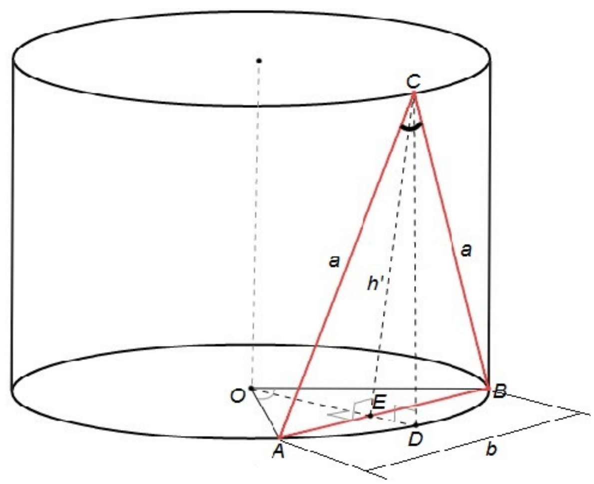
Usando semplici formule geometriche si vede che ciascuna delle $4mn$ facce del poliedro è un triangolo isoscele avente base di lunghezza

$$b = 2r\sin\left(\frac{\pi}{m}\right),$$

e altezza di lunghezza

$$h' = \sqrt{r^2\Big[1-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\Big]^2 + \left(\frac{h}{2n}\right)^2}.$$

Si veda la figura:



$$AE = r\sin\left(\frac{\pi}{m}\right),\ OE = r\cos\left(\frac{\pi}{m}\right),\ ED = r\Big(1-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\Big),\ CD = \frac{h}{2n}.$$

Pertanto, la somma delle aree dei $4mn$ triangoli vale

$$A(m,n) = 4mn\frac{b\,h'}{2} = 2\pi r\frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{h^2 + \left[2\,\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}{(\frac{\pi}{m})^2}\right]^2\left(\frac{\pi^2 rn}{m^2}\right)^2}.$$

C'è in questa formula un termine "scomodo": $\left(\frac{\pi^2 rn}{m^2}\right)^2$. Se $m \to +\infty$ e $n \to +\infty$, non è detto che esso tenda a zero, come si vorrebbe, per avere che $A(m,n) \to 2\pi rh$. Anzi, possiamo affermare che

il limite di $A(m,n)$ per $(m,n) \to (+\infty,+\infty)$ non esiste!

Si noti ad esempio che $A(m,m) \to 2\pi rh$, mentre $A(m,m^3) \to +\infty$ e, per ogni $\ell \geq 2\pi rh$, esiste una successione $(n_m)_m$ tale che $n_m \to +\infty$ e $A(m,n_m) \to \ell$.