Gerarchie cumulative e computabilità sopra universi d'insiemi*

Domenico Cantone[1], Claudio Chiaruttini[2 3], Marianna Nicolosi Asmundo[1], and Eugenio G. Omodeo[2]

[1] Università di Catania, Dipartimento di Matematica e Informatica; email: cantone@dmi.unict.it, nicolosi@dmi.unict.it
[2] Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Informatica; email: chiaruttini@units.it, eomodeo@units.it
[3] Università di Trieste, Centro Interdipartimentale per le Scienze Computazionali

Sommario Varie indagini metamatematiche, a partire dalla storica dimostrazione di Fraenkel dell'indipendenza dell'assioma di scelta, necessitavano il ricorso alla definizione di universi gerarchici di insiemi. Ciò ha portato alla scoperta di importanti strutture cumulative, tra cui quella individuata da von Neumann (generalmente indicata come l'universo di *tutti* gli insiemi) e l'universo dei cosiddetti *construibili* di Gödel. Varianti di tali strutture tornano utili anche in studi riguardanti i fondamenti dell'analisi (secondo l'approccio di Abraham Robinson), o riguardanti gli insiemi non-ben-fondati. Mossi dunque dalla loro rilevanza e pervasività nella matematica, offriamo qui una presentazione sistematica di queste molte strutture. Riporteremo come numerose proprietà di nozioni inerenti le gerarchie di insiemi, quale ad esempio la nozione di *rango*, siano state controllate grazie all'assistenza del verificatore di dimostrazioni ÆtnaNova. Illustreremo poi, tramite procedure per la manipolazione efficace degli insiemi ereditariamente finiti di Ackermann, implementate in SETL e in Maple, un caso particolarmente significativo fra i tanti in cui le entità costitutive di un universo di insiemi possono venire costruite e trattate algoritmicamente: per questa via, il fruttuoso impiego delle gerarchie cumulative di insiemi viene ad estendersi dalla matematica pura agli ambiti dell'informatica teorica e dell'algoritmica.

Parole chiave: Teoria degli insiemi, teoria computabile degli insiemi, gerarchie cumulative, superstrutture, insiemi ereditariamente finiti, insiemi costruibili, iperinsiemi, verifica di dimostrazioni, sillogistiche.

Introduzione

La teoria assiomatica degli insiemi si era già evoluta (con il contributo essenziale di Zermelo, Fraenkel e Skolem) nella versione odierna, *ZF*, quando von Neumann ne propose come modello la sua celebre *gerarchia cumulativa* [26]. Essendo concepita a valle di un'indagine pluri-decennale sui fondamenti della matematica, tale struttura forse non merita del tutto la rilevanza di *intended model*: basti dire che ZF ammette, oltre a questo modello (avente come suo dominio di supporto una classe propria[1] e comprendente fra i suoi elementi insiemi di cardinalità superiore al numerabile), modelli di cardinalità numerabile.[2] Inoltre Gödel proporrà un modello alternativo a quello di von Neumann, quello dei *costruibili* [17], che solo in presenza di un assioma specifico viene a coincidere con quello di von Neumann.

La gerarchia cumulativa rappresenta comunque, per chi si accosta ad uno studio sugli insiemi avanzato (e non "addomesticato" *ad usum delphini*), un valido strumento concettuale con cui è opportuno familiarizzare—sia pure a un livello intuitivo, ma non per

* Ricerca parzialmente finanziata dal progetto PRIN 2006/07 "*Large-scale development of certified mathematical proofs*", n. 2006012773.

[1] Come torneremo a dire nelle Sezioni 11 e 13, una classe propria si differenzia da un insieme per il fatto di non appartenere come elemento ad altre classi.

[2] Ciò costituisce il cosiddetto *paradosso di Skolem*.

questo meno rigoroso—, prima di intraprendere lo studio di ZF nella sua veste assiomatica tradizionalmente basata sul calcolo predicativo del prim'ordine.

Uno dei benefici che possono discendere dal porre la semantica avanti alla descrizione logico-formale, è la gradualità resa possibile da un simile approccio. Preliminarmente alla gerarchia cumulativa dotata di un livello per ogni ordinale (anche transfinito, come proposto da von Neumann), introdurremo in questo lavoro delle gerarchie ad essa simili ma meno impegnative. Una di queste strutture, quella degli insiemi *ereditariamente finiti*, può essere presa a modello di riferimento per una teoria assiomatica vicina a quella di Zermelo ma limitata al trattamento degli insiemi *finiti* [36]; altre gerarchie, le cosiddette *sovrastrutture* giocano un ruolo importante nei fondamenti dell'analisi non-standard [13]. Lo studio di queste versioni ridotte della gerarchia di von Neumann porta alla luce manipolazioni algoritmiche che hanno senso fin tanto che ci si occupi solo di insiemi relativamente semplici, ma che possono rendere gli insiemi ben accetti a una comunità piú orientata agli aspetti informatici che non a quelli fondazionali.[3]

Varie gerarchie affini a quelle cumulativa di von Neumann hanno rivestito un ruolo storicamente cruciale nelle indagini su teorie assiomatiche "rivali" di ZF. In quest'ambito piú speculativo meritano attenzione modelli proposti per lo studio sull'indipendenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi del continuo: una "proto-gerarchia cumulativa" proposta da Fraenkel nel lontano 1922 [14] e la già menzionata classe dei costruibili di Gödel. Inoltre, come esamineremo su un'istanza di "piccola scala" (in quanto riferita a soli *iperinsiemi finiti*), è facile ricavare modelli di teorie degli insiemi non ben fondati [2,4] a partire da gerarchie standard.

Per le ragioni suesposte, ci sembra utile una rivisitazione delle gerarchie cumulative (e strutture loro apparentate), quali esse si affacciano in diversi ambiti della matematica e dell'informatica teorica. Non intendiamo svolgere un'opera di erudizione, ma predisporre la materia in termini utili, da un lato

– a chi voglia intraprendere lo sviluppo di librerie *software* per la gestione di insiemi (o mappe, multi-insiemi, iperinsiemi, ecc.), con piena consapevolezza dei principi retrostanti le applicazioni (ad esempio—per fare il caso degli iperinsiemi—applicazioni nell'ambito del π-*calcolo* [34,25]); da un altro lato,
– a chi voglia sviluppare con tutto il rigore formale del caso, sotto forma di *proofware* riutilizzabile, le dimostrazioni basilari riguardanti dette gerarchie.

Per muovere nella prima di queste due direzioni, abbiamo realizzato (come riferiamo in appendice, v. Sez. 18) dei moduli Maple contenenti l'implementazione degli insiemi ereditariamente finiti; per muoverci nell'altra, abbiamo sviluppato varie 'teorie'[4] nell'ambito del nostro sistema Referee/ÆtnaNova di verifica automatica delle dimostrazioni [8,10,11,28,31,37].

1 La piú semplice delle gerarchie cumulative

Analizzando i ragionamenti matematici, i logici si convinsero che la nozione di "insieme" è il concetto piú fondamentale della matematica. Questo non vuole sminuire

[3] L'importanza di algoritmi per la manipolazione di insiemi nidificati è attestata dalla presenza degli insiemi (e delle correlate *mappe* associative) in numerosi linguaggi di programmazione (SETL, Maple, Python, ecc.).
[4] La parola *teoria* ha qui un significato molto tecnico, legato al costrutto THEORY del verificatore Referee.

il carattere fondamentale degli interi. Anzi una posizione abbastanza ragionevole sarebbe quella di accettare gli interi come entità primitive, e quindi usare insiemi per formare entità di tipo superiore. Tuttavia, si vede che anche la nozione di intero può essere derivata dalla nozione astratta di insieme, e questo è l'approccio che seguiremo.

[12, pag. 57]

Diamo per scontata una certa familiarità con gli insiemi, che comprenda le nozioni di insieme *vuoto*, di formazione di *singoletti*, di *unione* di (due o una pluralità di) insiemi, di formazione dell'insieme *potenza* di un insieme.

Diamo qui la sequenza delle definizioni di

$$\begin{array}{lcl}
\textbf{numeri}: & \text{e} & \textbf{livelli}: \\
0 =_{\text{Def}} \emptyset\,, & & \mathcal{V}_0 =_{\text{Def}} \emptyset\,; \\
1 =_{\text{Def}} \{0\}\,, & & \mathcal{V}_1 =_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_0)\,; \\
2 =_{\text{Def}} 1 \cup \{1\}\,, & & \mathcal{V}_2 =_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)\,; \\
3 =_{\text{Def}} 2 \cup \{2\}\,, & & \mathcal{V}_3 =_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_2)\,; \\
& \text{ecc.,} &
\end{array}$$

espandendo le quali possiamo effettivamente determinare i livelli come segue:

$$\begin{array}{l}
\mathcal{V}_1 = \{\mathbf{0}\} = 1 = \{\mathcal{V}_0\}, \qquad\qquad \mathcal{V}_2 = \{0,\ \ \mathbf{1}\} = 2 = \{0,\ \ \mathcal{V}_1\}, \\
\mathcal{V}_3 = \big\{0, 1,\ \ \{1\}, \mathbf{2}\big\} = \big\{0, 1,\ \ \{1\}, \mathcal{V}_2\big\}, \\
\mathcal{V}_4 = \Big\{0, 1, \{1\}, 2,\ \ \big\{\{1\}\big\}, \big\{2\big\}, \big\{0, \{1\}\big\}, \big\{0, 2\big\}, \big\{1, \{1\}\big\}, \big\{1, 2\big\}, \big\{0, 1, \{1\}\big\}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{3}, \big\{\{1\}, 2\big\}, \big\{0, \{1\}, 2\big\}, \big\{1, \{1\}, 2\big\}, \mathcal{V}_3\Big\}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ecc..}
\end{array}$$

Si noti che i numeri (naturali), intesi come sopra, si presentano come insiemi. Tanto i livelli $\mathcal{V}_i$ che gli elementi di ciascuno di essi sono, del pari, insiemi.

Ciascuno dei livelli $\mathcal{V}_i$ ha una quantità *finita* di elementi—per quanto, valutando con precisione, si scopra che tale quantità è (se $i > 1$) l'iperesponenziale

$$2^{\cdot^{\cdot^{2}}}\Big\}i - 1 \text{ volte}$$

—inoltre ciascuno appartiene al successivo $\mathcal{V}_{i+1}$ ed "*inscatola*" (come sottoinsiemi, oltre ad averli come elementi) i $\mathcal{V}_j$ di indice piú basso; inoltre l'inclusione di ciascun $\mathcal{V}_i$ in $\mathcal{V}_{i+1}$ è *stretta* (i.e., $\mathcal{V}_i \subsetneq \mathcal{V}_{i+1}$), dato che ciascun numero i appartiene allo STRATO $\mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$. A cominciare da $\mathcal{V}_3$, cui appartiene l'insieme $\{1\}$, i $\mathcal{V}_i$ hanno anche dei non-numeri fra i loro elementi.

Se x appartiene a $\mathcal{V}_i$, sono finiti tanto x che gli elementi di x, come pure tutti gli elementi di elementi di x, ecc.. In ragione di ciò, si dice che x è EREDITARIAMENTE FINITO.

La GERARCHIA CUMULATIVA $\mathcal{V}_\omega$ degli insiemi *ereditariamente finiti* PURI ('puri' nel senso che nella loro formazione non intervengono altro che insiemi, tutti in ultima analisi fondati sullo $\emptyset$) è costituita da tutti quegli insiemi che entrano a far parte di $\mathcal{V}_i$ dopo un numero finito di passi della precedente costruzione:

$$
\begin{array}{llll}
\omega & =_{\text{Def}} \mathbb{N} & =_{\text{Def}} \{0,1,2,\dots\} & \\
\mathcal{V}_\omega & & =_{\text{Def}} \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 \cup \cdots & (\textit{ad infinitum})^5.
\end{array}
$$

Si chiama RANGO di x, per ciascun x in $\mathcal{V}_\omega$, il primo degli i per cui x appartiene a $\mathcal{V}_{i+1}$ (ossia x è incluso in $\mathcal{V}_i$). Esempi: ogni numero i ha rango i; il rango di $\{0,2\}$ è 3. Possiamo vedere il rango di un insieme come una misura di quanto profondamente vi è rannidato lo $\emptyset$ quando esso viene scritto nella notazione primitiva—ad esempio $\{0,2\}$ dev'essere riscritto come $\Big\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}$. La seguente formuletta ricorsiva ci permette di determinare il rango di qualsiasi insieme X in $\mathcal{V}_\omega$:

$$
\mathsf{rk}(X) \;=\; \bigcup \Big\{ \mathsf{rk}(y) \cup \{\mathsf{rk}(y)\} \,:\, y \in X \Big\}.
$$

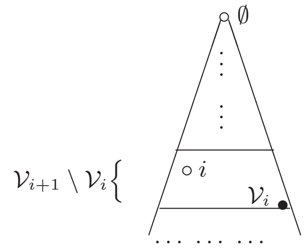

Figura 1. Gerarchia cumulativa fondata sul vuoto

2 Qualche osservazione sui numeri naturali

La concezione dei numeri naturali vista sopra è del matematico ungaro-statunitense John (János) von Neumann (1903–1957). Si potrebbe obiettare che la nozione di numero viene *prima* di quella di insieme e che in un certo senso essa è presupposta nella costruzione di $\mathcal{V}_\omega$ vista sopra. Una contro-obiezione è che il "saper contare" viene prima ancora del concetto di numero e che tale abilità è tutto ciò che la costruzione di $\mathcal{V}_\omega$ presuppone.

Se però, dal lato dei numeri, "contare" significa reiterare l'operazione

$$
X \;\overset{+1}{\longmapsto}\; X \cup \{X\}
$$

di incremento unitario, dal lato degli insiemi è la ben piú complessa formazione

$$
X \;\longmapsto\; \mathcal{P}(X)
$$

dell'insieme potenza a venir reiterata.

Si noti che per i numeri intesi alla von Neumann la relazione di ordine, tradizionalmente espressa con i simboli $<$ e $\leqslant$, si confonde con quelle di appartenenza e di inclusione fra insiemi, di cui viene ad essere un caso particolare. In effetti, quando i e j sono numeri, abbiamo

[5] Quasi superfluo dire che l'infinità cui ci stiamo riferendo è quella costituita dai soli numeri naturali.

$$\begin{array}{lcl} i < j & & \text{sse } i \in j, \\ i < j & & \text{sse } i \subsetneq j, \\ i \leqslant j & & \text{sse } i \subseteq j, \\ \max(i,j) & = & i \cup j, \\ \min(i,j) & = & i \cap j. \end{array}$$

3 Insiemi transitivi e loro ordinamenti lessicografici

Non per i numeri soltanto la distinzione fra appartenenza ed inclusione è tenue. Vi sono, in effetti, innumerevoli altri insiemi S soddisfacenti la condizione che[6]

$$\text{quando } x \in S \text{ allora } x \subset S,$$

ovvero, equivalentemente, di essere TRANSITIVI, ai sensi della definizione

$$\mathsf{Trans}(S) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad S \subset \mathcal{P}(S)\,,$$

o ancora, equivalentemente,[7] la condizione che

$$\bigcup S \quad \subseteq \quad S\,.$$

È transitivo, tanto per fare un caso, ciascuno dei livelli $\mathcal{V}_i$.

Supponiamo che una famiglia transitiva S di insiemi (che anche travalichi il limitato universo $\mathcal{V}_\omega$ visto sinora) sia munita di un ordinamento totale $\lhd$. Se consideriamo un elemento x di S, il fatto che x sia anche sottoinsieme di S ci permette di disporne gli elementi nell'ordine indotto da $\lhd$ e dunque di individuare, nel caso x sia finito e non vuoto, il massimo tra di loro: $\max_\lhd(x)$. Diremo che l'ordinamento $\lhd$ è LESSICOGRAFICO se ogniqualvolta x ed y sono elementi *distinti, entrambi finiti,* di S si ha che $x \lhd y$ quando vale una delle seguenti tre circostanze:

- $x = \emptyset$; oppure
- $x \neq \emptyset$, $y \neq \emptyset$ e $\max_\lhd(x) \lhd \max_\lhd(y)$; oppure
- $x \neq \emptyset$, $y \neq \emptyset$, $\max_\lhd(x) = \max_\lhd(y)$ ed $x \setminus \{\max_\lhd(x)\} \lhd y \setminus \{\max_\lhd(x)\}$.

Detto altrimenti, l'ordinamento $\lhd$ è *lessicografico* se, per ogni coppia x, y di insiemi finiti in S, risulta che $x \lhd y$

- quando $x \subsetneq y$;
- quando $x \nsubseteq y$, $y \nsubseteq x$ e, posto che sia $x = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_0, \ldots, y_m\}$ con $x_0 \lhd \cdots \lhd x_n$ ed $y_0 \lhd \cdots \lhd y_m$, in corrispondenza al massimo valore h per cui $x_h \neq y_{m-(n-h)}$ si trova che $x_h \lhd y_{m-(n-h)}$.

A tutta prima si potrebbe supporre che vi sia un solo ordinamento lessicografico su di un insieme transitivo S: cosí, in effetti (come approfondiremo nella Sez. 7), finché $S \in \mathcal{V}_\omega$ o anche $S = \mathcal{V}_\omega$; ma la situazione cambia se S ha qualche elemento infinito, poiché la condizione di lessicograficità non esige, riguardo al confronto con tali insiemi, nulla.

[6] In questa condizione, come anche nella successiva definizione di $\mathsf{Trans}(\_)$, è indifferente che $\subset$ venga inteso come $\subseteq$ o come $\subsetneq$, se si esclude—come normalmente avviene—che alcun insieme S possa soddisfare l'autoappartenenza $S \in S$; prescindendo dall'assunzione che $S \notin S$, l'articolo seminale [38] da cui trae origine la teoria assiomatica degli insiemi fornisce un'agile dimostrazione del fatto che $\mathcal{P}(S) \nsubseteq S$: mostra che $\{x \in S \mid x \notin x\} \in \mathcal{P}(S) \setminus S$.

[7] Se $S \subset \mathcal{P}(S)$, allora ogni $y \in \bigcup S$, avendo un $x \in S$ tale che $y \in x$ e poiché $x \subseteq S$, soddisferà anche $y \in S$. Se, viceversa, $\bigcup S \subseteq S$ ed $x \in S$, allora $x \subseteq \bigcup S$ e pertanto $x \subseteq S$: dunque, $x \in \mathcal{P}(S)$.

Sarebbe forse piú opportuno chiamare un ordinamento $\lhd$ soddisfacente la proprietà in esame *anti*lessicografico, dato che il confronto fra due insiemi finiti procede non “da sinistra” ma “da destra”; preferiamo però il vocabolo piú corto, anche per ragioni storiche. Circa la ragione per procedere da destra, osserviamo che se procedessimo all'opposto, avremmo per esempio $\{0, 2\}$ *prima* di $\{1\}$, sebbene $\{1\}$ compaia a un livello piú basso della gerarchia cumulativa vista sopra; per contro, il confronto lessicografico condotto da destra ci assicurerà che gli insiemi di uno strato precedano quelli degli strati successivi.

4 Le sovrastrutture

Stiamo per introdurre un'ovvia generalizzazione della gerarchia cumulativa vista sopra. Anziché dalla base vuota $\mathcal{V}_0 = \emptyset$, partiamo questa volta da una base di INDIVIDUI intesi come degli “ur-elementi” (o “atomi”) chiaramente distinguibili dagli insiemi (dunque, come caso particolare, distinti da $\emptyset$), utilizzabili come membri nella formazione di insiemi. Indicando con B tale base, dobbiamo ritoccare la definizione dei $\mathcal{V}_i$ se vogliamo preservare l'inscatolamento di ciascun livello della gerarchia nel successivo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^B &=_{\text{Def}} B\,; \\ \mathcal{V}_1^B &=_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_0^B) \cup B\,; \\ \mathcal{V}_2^B &=_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_1^B) \cup B\,; \\ &\text{ecc..} \end{aligned}$$

L'infinita famiglia di insiemi ed individui

$$\mathcal{V}_\omega^B \quad =_{\text{Def}} \; \mathcal{V}_0^B \cup \mathcal{V}_1^B \cup \mathcal{V}_2^B \cup \mathcal{V}_3^B \cup \cdots \qquad (\textit{ad inf.})$$

viene talvolta chiamata SOVRASTRUTTURA generata da B. Ovviamente ritroviamo

$$\mathcal{V}_i^B = \mathcal{V}_i \;\text{ quando }\; B = \emptyset,$$

come risulta da una semplice argomentazione induttiva. Quando $B \supseteq B'$, allora varrà l'inclusione $\mathcal{V}_i^B \supseteq \mathcal{V}_i^{B'} \cup (B \setminus B')$: in particolare

$$\mathcal{V}_i^B \supsetneqq \mathcal{V}_i \;\text{ quando }\; B \neq \emptyset,$$

e alla fine della fiera—sempre assumendo che $B \neq \emptyset$—avremo $\mathcal{V}_\omega^B \supsetneqq \mathcal{V}_\omega$.

Non è piú detto, con questa modificata gerarchia cumulativa, che tutti gli insiemi che vengono a farne parte (come membri di un qualche livello $\mathcal{V}_i^B$) siano finiti: in effetti, qualora B sia infinito, già il livello $\mathcal{V}_1^B$ comprenderà un'infinità di insiemi dotati ciascuno di un'infinità di elementi; ad es. questi:

$$B,\; B \setminus \{b_0\},\; B \setminus \{b_0, b_1\},\; B \setminus \{b_0, b_1, b_2\}, \ldots\;,$$

se supponiamo che i b_j siano elementi di B distinti uno dall'altro. Volendoci limitare, come nella gerarchia vista all'inizio, a soli insiemi EREDITARIAMENTE FINITI, possiamo restringere la costruzione come segue. Invece del costruttore $\mathcal{P}(X)$, che produce la famiglia di *tutti* i sottoinsiemi di X, utilizziamo $\mathcal{F}(X)$, che produce la famiglia dei sottoinsiemi *finiti*; otterremo cosí:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^B &=_{\text{Def}} B\,; \\ \mathcal{H}_1^B &=_{\text{Def}} \mathcal{F}(\mathcal{H}_0^B) \cup B\,; \\ \mathcal{H}_2^B &=_{\text{Def}} \mathcal{F}(\mathcal{H}_1^B) \cup B\,; \\ &\text{ecc.,} \end{aligned}$$

per concludere con

$$\mathcal{H}^B_\omega \quad =_{\text{Def}} \quad \mathcal{H}^B_0 \cup \mathcal{H}^B_1 \cup \mathcal{H}^B_2 \cup \mathcal{H}^B_3 \cup \cdots \qquad (\textit{ad inf.}).$$

È ovvio che

$$\mathcal{H}^B_i = \mathcal{V}^B_i \ \text{ quando la base } \ B \text{ è finita.}$$

Riprendiamo qui da [13, pagg. 12-15], ove esse sono dettagliatamente inventariate e dimostrate, varie proprietà di chiusura delle sovrastrutture. Innanzitutto, nelle sovrastrutture ciascun livello è "*transitivo*", nel senso che

$$\mathcal{V}^B_i \setminus B \ \subsetneq \ \mathcal{P}(\mathcal{V}^B_i) \ \subsetneq \ \mathcal{V}^B_\omega \setminus B \ \subsetneq \ \mathcal{P}(\mathcal{V}^B_\omega) \qquad \text{per } i \in \omega\,;$$

inoltre

quando $x \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$ allora $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$ ed $\bigcup(x \setminus B) \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$,
quando $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{V}^B_\omega$ allora $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$,
quando $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$ allora $x_1 \cup \cdots \cup x_k \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$,
quando $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{V}^B_\omega$ e $k \geqslant 2$ allora $\langle x_1, \ldots, x_k\rangle \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$,
quando $x, y \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$ allora $x \times y \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$,

se intendiamo la COPPIA ORDINATA alla Kuratowski,[8] o —secondo che noi preferiamo [16]— come

$$\langle X, Y\rangle \quad =_{\text{Def}} \quad \big\{\{X, Y\}, \{Y\} \setminus \{X\}\big\}$$

(per cui $U \times V \quad =_{\text{Def}} \quad \{\langle x, y\rangle :\ x \in U, y \in V\}$), e ricorsivamente poniamo

$$\langle x_1, \ldots, x_{k+1}\rangle \quad =_{\text{Def}} \quad \big\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_{k+1}\rangle\big\rangle, \ \text{ per } k \geqslant 2\,.$$

Grazie alla costituzione gerarchica di $\mathcal{V}^B_\omega$, *non* esistono catene discendenti infinite

$$\cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

scaturenti da alcun $x_0 \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus B$. È pertanto possibile definire un'operazione

$$x \longmapsto \mathsf{arb}(x)$$

in modo tale che

- quando $x \in \mathcal{V}^B_\omega \setminus (B \cup \{\emptyset\})$, allora $\mathsf{arb}(x) \in x$ ed

$$\mathsf{arb}(x) \notin B \quad \rightarrow \quad \mathsf{arb}(x) \cap x = \emptyset\,;$$

- quando $x \in B \cup \{\emptyset\}$ allora $\mathsf{arb}(x) = x$.

Cosí avremo, ovviamente, che

$$\mathsf{arb}(x) \in \mathcal{V}^B_\omega \text{ per ogni } x \in \mathcal{V}^B_\omega.$$

[8] Kazimierz Kuratowski (1896–1980), che nel 1922 definí la coppia ordinata come

$$\langle X, Y\rangle \quad =_{\text{Def}} \quad \big\{\{X\}, \{X, Y\}\big\}\,.$$

Possiamo, infine, definire le multi-immagini e le immagini singole di qualsiasi insieme f (trascurando eventuali suoi elementi che non siano coppie ordinate), ponendo:

$$f \upharpoonright\!\!\!^{\rightarrow} v =_{\text{Def}} \{y :\ \langle x, y\rangle \in f \mid x \in v\}\ ,$$
$$f \upharpoonright x =_{\text{Def}} \mathsf{arb}(f \upharpoonright\!\!\!^{\rightarrow} \{x\})\ .$$

Anche per questi costrutti di APPLICAZIONE varranno ovvie proprietà di chiusura:

$$\text{quando } f, v \in \mathcal{V}_\omega^B \setminus B \text{ allora } f \upharpoonright\!\!\!^{\rightarrow} v \in \mathcal{V}_\omega^B \setminus B\ ,$$
$$\text{quando } f \in \mathcal{V}_\omega^B \setminus B \text{ ed } x \in \mathcal{V}_\omega^B \text{ allora } f \upharpoonright x \in \mathcal{V}_\omega^B\ .$$

5 Immersione in un universo $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ di Herbrand

Potremmo sviluppare la costruzione di $\mathcal{H}_\omega^B$ in un'altra maniera [15], tramite un costruttore binario $\boldsymbol{w}(X, Y)$ con cui rappresentare l'operazione $X \cup \{Y\}$. Costruiamo dapprima la famiglia $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ di tutti i TERMINI sulla segnatura

$$\boldsymbol{a}_{/0} \quad \text{con } \boldsymbol{a} \text{ in } B\,, \qquad \boldsymbol{\emptyset}_{/0}, \qquad \boldsymbol{w}_{/2}\,,$$

in base alle seguenti regole:

- $\boldsymbol{\emptyset}$ costituisce termine a sé;
- ogni $\boldsymbol{a}$ in B costituisce termine a sé;
- quando s, t sono termini, anche $\boldsymbol{w}(s, t)$ è un termine;
- sono termini solo quelle espressioni che si possono riconoscere tali in base alle precedenti tre clausole.[9]

Per catturare le proprietà degli insiemi, stabiliamo la regola di riscrittura

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}(X, Y), Y) \;\rightsquigarrow\; \boldsymbol{w}(X, Y)$$

e la

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}(X, Y), Z) \;\rightsquigarrow\; \boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}(X, Z), Y).$$

La prima di queste dice che inserire per due o piú volte lo stesso elemento in un insieme non differisce dall'inserirvelo una volta sola. Inoltre, quando piú elementi vengono inseriti, l'ordine degli inserimenti non influisce sul risultato. Senza queste identità, l'universo dei termini sarebbe *libero*; ma ora viene ad essere quozientato in classi di equivalenza, cosicché due termini verranno riguardati come "lo stesso insieme" quando sono equivalenti a meno di un riordino degli elementi e dell'eliminazione dei doppioni. L'"universo" risulta, cosí, piú ricco dell'$\mathcal{H}_\omega^B$ di prima, a meno che non si escludano dal dominio d'interesse i termini di COLORE diverso da $\boldsymbol{\emptyset}$, dove vige la definizione

$$\begin{array}{lll} \text{colore}(\boldsymbol{\emptyset}) & =_{\text{Def}} & \boldsymbol{\emptyset}; \\ \text{colore}(\boldsymbol{a}) & =_{\text{Def}} & \boldsymbol{a}, \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{a} \text{ in } B\,; \\ \text{colore}(\boldsymbol{w}(s, t)) & =_{\text{Def}} & \text{colore}(s), \text{ per ogni coppia } s, t \text{ di termini.} \end{array}$$

[9] L'insieme di tutti i termini costruiti sopra una segnatura formata, come questa, di costanti (almeno una) e simboli di funzione, viene spesso chiamato un UNIVERSO DI HERBRAND (v. [22]), dal nome del matematico francese Jacques Herbrand (1908–1931).

6 L'universo $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ di von Neumann

Nel nostro sistema tutti gli oggetti sono insiemi. Non postuliamo l'esistenza di alcun altro oggetto piú primitivo. Per aiutare l'intuizione, il lettore pensi al nostro universo come alla totalità di tutti gli insiemi che possono essere formati da successivi processi di aggregazione, a partire dall'insieme vuoto.

[12, pag. 57]

Piuttosto che aggiungere individui alla propria gerarchia cumulativa, von Neumann suggeriva di estenderne la costruzione a *tutti* gli ORDINALI, inclusi quelli transfiniti.[10]

Gli ordinali finiti sono la stessa cosa che i numeri naturali; il primo ordinale infinito è l'ω già visto—cioè l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali—, cui segue a ruota il *successore* $\omega+1$, seguito a sua volta da $(\omega+1)+1$, ecc.. Cosí come ω non è successore immediato di altro ordinale, e in questo senso è un ordinale LIMITE, al termine della sequenza infinita di successori scaturente da ω troveremo il secondo ordinale limite, ecc.. Per uscire dall'*impasse* di un'intuizione malsicura su infiniti cosí remoti dall'esperienza, possiamo definire la nozione $\boldsymbol{\mathcal{O}}(\_)$ di ordinale in modo autonomo, nel contesto di una teoria *assiomatica* degli insiemi che qui non ci curiamo di esporre:

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}(\alpha) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \ \mathsf{Trans}(\alpha) \ \& \ (\forall x \in \alpha, y \in \alpha \,|\, x \in y \vee x = y \vee y \in x);$$

cioè: per ORDINALE si intende un insieme transitivo α all'interno del quale fra due elementi distinti x, y vige sempre una delle due relazioni $x \in y$, $y \in x$. Assumendo che la relazione di appartenenza sia *ben fondata* (cioè priva di cicli e, piú in generale, di catene discendenti

$$\cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

di lunghezza infinita), cosí come von Neumann la pensava, questa definizione impone che, al suo interno, ciascun ordinale sia ben ordinato dalla relazione di appartenenza. Possiamo definire *d'emblée*

$$\mathcal{V}_\alpha \quad =_{\text{Def}} \ \bigcup \Big\{ \mathcal{P}(\mathcal{V}_\beta) : \beta \in \alpha \Big\} \quad \text{per ogni ordinale } \alpha\,.$$

Questa definizione ricorsiva avrebbe senso per qualunque *insieme* α (in grazia della buona fondatezza di $\in$), ma è priva d'interesse se non quando α è un ordinale—in breve $\boldsymbol{\mathcal{O}}(\alpha)$. Per α ordinale SUCCESSORE, ossia quando c'è un β tale che $\alpha = \beta+1$ ($=_{\text{Def}}\beta \cup \{\beta\}$), si ha in virtú dell'inscatolamento (che continua a valere) che

$$\mathcal{V}_\alpha \quad = \quad \mathcal{P}(\mathcal{V}_\beta)\,;$$

quando α *non ha* predecessore immediato, avremo

$$\mathcal{V}_\alpha = \emptyset \quad \text{oppure} \quad \mathcal{V}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(\mathcal{V}_\beta)$$

a seconda che α sia 0 oppure un ordinale *limite*. L'ultima espressione non è altro che la definizione di partenza, dove con il simbolo $<$ si è voluto sottolineare che $\in$ funge, fra gli ordinali, da relazione d'ordine.

[10] Ciò per tener conto del *postulato dell'infinito* con cui Zermelo [38] richiedeva l'esistenza di un insieme avente $\emptyset$ fra i suoi elementi e chiuso rispetto alla formazione $X \longmapsto \{X\}$ di singoletti.

La caratterizzazione del RANGO, fornita in Sez. 1 come collaterale ad una nozione intuitiva, assurge ora—in una teoria assiomatica degli insiemi—a definizione:

$$\mathsf{rk}(X) \quad =_{\text{Def}} \quad \bigcup\big\{\mathsf{rk}(y)+1 :\; y \in X\big\}.$$

Con questa viene quantificato il "grado di annidamento" di qualsiasi insieme—anche infinito. Possiamo dunque raffigurarci la classe di tutti gli insiemi come la gerarchia stratificata, nota col nome di UNIVERSO DI VON NEUMANN:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} \;=\; \bigcup_{\boldsymbol{\mathcal{O}}(\alpha)} \mathcal{V}_\alpha\,,$$

dove l'unione ha luogo su tutta la *classe propria* degli ordinali. Resta vero, come valeva per gli ereditariamente finiti puri, che il rango di un insieme X è il predecessore immediato ϱ del primo ordinale α per cui $X \in \mathcal{V}_\alpha$ (dunque $\alpha = \varrho + 1$); detto altrimenti, è il primo ordinale ϱ per cui $X \subseteq \mathcal{V}_\varrho$.

Si dimostrano facilmente le leggi

$$\begin{array}{rcl}
 & & \boldsymbol{\mathcal{O}}\big(\mathsf{rk}(X)\big) \;\;\&\;\; \Big(\boldsymbol{\mathcal{O}}(Y) \leftrightarrow Y = \mathsf{rk}(Y)\Big),\\
 & & X \in Y \;\rightarrow\; \mathsf{rk}(X) < \mathsf{rk}(Y),\\
 & & X \subseteq Y \;\rightarrow\; \mathsf{rk}(X) \leqslant \mathsf{rk}(Y),\\
 & & \mathsf{rk}(X) = 0 \;\leftrightarrow\; X = \emptyset,\\
 & & \mathsf{rk}(X \cup Y) \;=\; \mathsf{rk}(X) \cup \mathsf{rk}(Y),\\
\mathsf{rk}\big(\mathcal{P}(X)\big) & = & \mathsf{rk}\big(\{X\}\big) \;=\; \mathsf{rk}(X)+1\,,\\
 & & \mathsf{rk}\big(\{X_0, X_1, \dots, X_n\}\big) \;=\; \mathsf{rk}(\{X_0\}) \cup \mathsf{rk}(\{X_1\}) \cup \dots \cup \mathsf{rk}(\{X_n\})\,,\\
 & & \mathsf{rk}\big(\bigcup X\big) \;=\; \bigcup\big\{\mathsf{rk}(y) : y \in X\big\},\\
 & & \mathsf{rk}\big(\langle X, Y\rangle\big) \;=\; \mathsf{rk}\big(\{X, Y\}\big)+1\,,\\
 & & 1 < \mathsf{rk}(X) \;\leftrightarrow\; \mathsf{rk}(X) = \mathsf{rk}\big((X \setminus 1) \cup (1 \setminus X)\big)\,.
\end{array}$$

Inoltre, se definiamo ricorsivamente la chiusura transitiva di un insieme X come

$$\mathsf{trCl}(X) \;=_{\text{Def}} X \;\cup\; \bigcup\{\, \mathsf{trCl}(y) :\; y \in X\,\}$$

e denotiamo con $\mathsf{Finite}(X)$ la proprietà di *finitudine* che un insieme X soddisfa se e solo se il suo numero complessivo di elementi è finito, abbiamo la seguente caratterizzazione alternativa degli insiemi ereditariamente finiti:

$$\mathsf{rk}(X) \in \omega \;\leftrightarrow\; \mathsf{Finite}(\mathsf{trCl}(X))\,.$$

7 L'ordinamento lessicografico di Ackermann

Si consideri la definizione (probabilmente criptica, almeno al primo sguardo):

$$\begin{array}{lcl}
P \,\partial\, Q & =_{\text{Def}} & \big\{v \in P \mid Q \supseteq \{w \in P \mid v \lhd w\}\big\} \setminus Q\,,\\
X \lhd Y & \leftrightarrow_{\text{Def}} & \big((X \cup Y)\,\partial\,(X \cap Y)\big) \cap Y \neq \emptyset\,.
\end{array}$$

Possiamo, se non altro, renderci subito conto che siamo in presenza non di una circolarità viziosa, ma di una forma accettabile di ricorsione. In effetti, una volta espanso il $\lhd$ che compare nel primo *definiens* secondo il dettato della seconda linea di definizione,

$$P \,\partial\, Q \;=_{\text{Def}}\; \big\{v \in P \mid Q \supseteq \{w \in P \mid \big((v \cup w)\,\partial\,(v \cap w)\big) \cap w \neq \emptyset\}\big\} \setminus Q\,,$$

constatiamo che l'operando $v \cup w$ del ∂ occorrente sulla destra ha rango inferiore al rango della P nel *definiendum*. In virtú della buona fondatezza di $\in$, il rango dell'operando sinistro di ∂ potrà calare solo un numero finito di volte, fino ad azzerarsi del tutto; ma allora, come consegue immediato dalla specifica di ∂, avremo che

$$\emptyset\,\partial\,\_ \;=\; \emptyset\,.$$

Per poter cogliere, limitatamente ad insiemi P, Q, X, Y *ereditariamente finiti*, il senso delle definizioni di ∂ e $\lhd$, immaginiamo di sapere che la relazione $X \lhd Y$ stabilisce un *ordine totale* fin quando X, Y spaziano ad un certo livello $\mathcal{V}_i$ della gerarchia $\mathcal{V}_\omega$ (cosa ovvia per $i < 2$). Passiamo poi a considerare una coppia X', Y' di insiemi di livello $i+1$, uno almeno dei due avente rango i; procediamo quindi alla determinazione di $(X' \cup Y')\partial(X' \cap Y')$. Quest'ultimo si determina a partire dalla famiglia di tutti quegli insiemi che, all'interno dell'unione $X' \cup Y'$, sono maggiorati soltanto da elementi dell'intersezione $X' \cap Y'$: se fra questi nessuno sta fuori dall'intersezione, allora $X' = Y'$ e

$$\emptyset = (X' \cup Y')\partial(X' \cap Y') = \big((X' \cup Y')\partial(X' \cap Y')\big) \cap Y' = \big((X' \cup Y')\partial(X' \cap Y')\big) \cap X'$$

(per cui $X' \not\!\lhd Y'$ e $Y' \not\!\lhd X'$); altrimenti ve ne sarà esattamente uno, e quell'uno, secondo che sia sito in Y' o in X', stabilisce se debba essere $X' \lhd Y'$ o viceversa.

Tutto ciò può sintetizzarsi nel dire che $\lhd$, ristretto ad un qualunque livello $\mathcal{V}_\beta$ con $\beta \leqslant \omega$, è ORDINAMENTO LESSICOGRAFICO (v. Sez. 3).

L'ordinamento di $\mathcal{V}_\omega$ or ora proposto ha tre prerogative che lo differenziano dal familiare ordinamento lessicografico delle *stringhe su di un alfabeto*:

– L'"alfabeto" non è fissato a monte, ma viene ad ogni strato arricchendosi di nuovi "caratteri" (alludendo con ciò agli insiemi che si aggiungono a ciascun livello).
– Mentre nella composizione di una stringa i caratteri possono ripetersi e comparire in qualunque ordine, in un insieme gli elementi possono presentarsi una volta sola e la naturale posizione occupata da ciascuno di essi è quella che $\lhd$ medesimo impone.
– La "scansione" degli elementi che determina quale insieme venga lessicograficamente prima e quale dopo non si effettua "da sinistra a destra" ma all'incontrario, procedendo dagli elementi grandi verso quelli piccoli.

È anche in virtú di queste sue prerogative che siamo riusciti a specificare *dichiarativamente* l'ordinamento $\lhd$ di $\mathcal{V}_\omega$ (tale specifica prescinde, per esempio, dal concetto di scansione). Procedendo iterativamente "dal basso", anziché descrivere ricorsivamente "dall'alto", è facile integrare la costruzione dell'ordinamento lessicografico nella generazione della gerarchia per livelli, come mostra la Sez. 17.

A differenza di come si comporta in $\mathcal{V}_\omega$, la relazione $\lhd$ cessa di essere ben fondata già in $\mathcal{V}_{\omega+1}$, ove possiede per esempio la seguente catena discendente infinita:

$$\cdots \lhd \mathcal{V}_\omega \setminus n \lhd \cdots \lhd \mathcal{V}_\omega \setminus 2 \lhd \mathcal{V}_\omega \setminus 1 \lhd \mathcal{V}_\omega \qquad (\text{con } n \in \omega).$$

Per estendere all'intero universo $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ la restrizione di $\lhd$ a $\mathcal{V}_\omega$ in modo che rimanga un buon ordine lessicografico, dovremo tornare a operare dal basso (v. sottostante Sez. 11), cioè ordinare gli insiemi per ranghi crescenti, mantenendo come *requisito* da soddisfare per la lessicograficità, piuttosto che come definizione, la coppia di condizioni riportata all'inizio di questa sezione: tali condizioni andranno riferite non piú ad insiemi qualunque P, Q, X, Y ma a soli insiemi *finiti* di cardinalità (seppure non di rango).

Intendiamo dire che un ordinamento buono $\prec$ di $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ sarà da considerare LESSICOGRAFICO se e solo se soddisfa la condizione

$$\big(\mathsf{Finite}(X)\ \&\ \mathsf{Finite}(Y)\big) \longrightarrow \big((X \cup Y)\ \partial_\prec\ (X \cap Y)\big) \cap Y \neq \emptyset\,,$$

dove

$$P\ \partial_\prec\ Q \ =_{\text{Def}}\ \big\{v \in P \mid Q \supseteq \{w \in P \mid v \prec w\}\big\} \setminus Q\,.$$

8 Aritmetica delle operazioni insiemistiche

L'ordinamento di Ackermann[11]

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \Big\{\{\{\emptyset\}\}\Big\},\ \Big\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\Big\},\ \Big\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\Big\},\ldots$$

introdotto sopra, consente di stabilire una corrispondenza biunivoca

$$p \ \longmapsto\ \widehat{p}$$

fra i numeri naturali e gli insiemi ereditariamente finiti puri (cfr. [1,21]). Ad esempio, poiché 0, 1, 2, 3 e 4 sono le *posizioni* che competono ai rispettivi insiemi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ e $\Big\{\{\{\emptyset\}\}\Big\}$, avremo che

$$\widehat{0}=\emptyset,\ \ \widehat{1}=\{\emptyset\},\ \ \widehat{2}=\{\{\emptyset\}\},\ \ \widehat{3}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \ \widehat{4}=\Big\{\{\{\emptyset\}\}\Big\},$$

e cosí via.

Stabilita questa corrispondenza, possiamo chiederci in quali relazioni e operazioni numeriche si traducano le relazioni e le operazioni insiemistiche basilari. Una parziale risposta viene dalla seguente tabella:

$\widehat{q} \lhd \widehat{p}$	$q < p$
$\widehat{q} \in \widehat{p}$	$\lfloor p/2^q \rfloor \mod 2 = 1$
$\emptyset$	0
$\{\widehat{p}\}$	2^p
$\widehat{p} \cup \widehat{q}$	$p+q$ quando $\widehat{p} \cap \widehat{q} = \emptyset$
$\widehat{p} \setminus \widehat{q}$	$p-q$ quando $\widehat{p} \subseteq \widehat{q}$
$\max\ \widehat{p}$	$\lfloor \log_2 p \rfloor$
$\langle \widehat{p}, \widehat{q} \rangle$	$(1+2^{2^p}) \cdot (\mathsf{if}\ \ p=q\ \ \mathsf{then}\ \ 1\ \ \mathsf{else}\ \ 2^{2^q}\ \ \mathsf{fi})$

Per brevità denoteremo con $\mathtt{hd}(\_), \mathtt{tl}(\_)$ i selettori di "testa" e "coda" di un insieme non nullo:

$$\mathtt{hd}(p)\ =_{\text{Def}}\ \lfloor \log_2 p \rfloor\,, \qquad\qquad \mathtt{tl}(p)\ =_{\text{Def}}\ p - 2^{\lfloor \log_2 p \rfloor}\,.$$

[11] Wilhelm Ackermann, 1896–1962.

Andare oltre questo stadio introduttivo richiede, in qualche punto, algoritmi di una relativa sofisticatezza. Quali posizioni competono, per esempio: al numero n (inteso alla von Neumann) e al livello $\mathcal{V}_n$? La risposta è data dalle seguenti specifiche per ricorrenza:

$$\begin{aligned}
\mathtt{num}(n) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ n=0\ \ \mathsf{then}\ \ 0\ \ \mathsf{else}\ \ \mathtt{num}(n-1)+2^{\mathtt{num}(n-1)}\ \ \mathsf{fi}\,;\\
\mathtt{cum}(n) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ n=0\ \ \mathsf{then}\ \ 0\ \ \mathsf{else}\ \ 2^{\mathtt{cum}(n-1)+1}-1\ \ \mathsf{fi}\,.
\end{aligned}$$

Per tradurre le operazioni booleane $\triangle, \cap$ di differenza simmetrica e intersezione (tramite le quali la definizione di $\cup$ e di $\setminus$ è immediata), un selettore arb conforme alle specifiche date in Sez. 4, e projezioni coniugate $\_^{[1]}, \_^{[2]}$ relative all'operazione $\langle \_, \_ \rangle$ di abbinamento, possiamo procedere cosí:

$$\begin{aligned}
\mathtt{sy}(p,q) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ p=0\ \ \mathsf{then}\ \ q\ \ \mathsf{elseif}\ \ q=0\ \ \mathsf{then}\ \ p\\
&\qquad \mathsf{elseif}\ \ \mathtt{hd}(p)<\mathtt{hd}(q)\ \ \mathsf{then}\ \ \mathtt{sy}(p,\mathtt{tl}(q))+2^{\mathtt{hd}(q)}\\
&\qquad \mathsf{elseif}\ \ \mathtt{hd}(q)<\mathtt{hd}(p)\ \ \mathsf{then}\ \ \mathtt{sy}(q,\mathtt{tl}(p))+2^{\mathtt{hd}(p)}\\
&\qquad \mathsf{else}\ \ \mathtt{sy}(\mathtt{tl}(p),\mathtt{tl}(q))\ \ \mathsf{fi}\,;\\
\mathtt{nt}(p,q) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ p=0\ \ \mathsf{or}\ \ q=0\ \ \mathsf{then}\ \ 0\\
&\qquad \mathsf{elseif}\ \ \mathtt{hd}(p)<\mathtt{hd}(q)\ \ \mathsf{then}\ \ \mathtt{nt}(p,\mathtt{tl}(q))\\
&\qquad \mathsf{elseif}\ \ \mathtt{hd}(q)<\mathtt{hd}(p)\ \ \mathsf{then}\ \ \mathtt{nt}(q,\mathtt{tl}(p))\\
&\qquad \mathsf{else}\ \ \mathtt{nt}(\mathtt{tl}(p),\mathtt{tl}(q))+2^{\mathtt{hd}(p)}\ \ \mathsf{fi}\,;\\
\mathtt{arb}(p) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ p=0\ \ \mathsf{then}\ \ 0\ \ \mathsf{else}\ \ \min_{q\in\mathbb{N}}\big(\widehat{q}\in\widehat{p}\big)\ \ \mathsf{fi}\,;\\
\mathtt{sn}(p) &=_{\text{Def}} \ \mathtt{hd}\Big(\mathtt{hd}(p)\setminus\mathtt{hd}\big(\mathtt{tl}(p)\big)\Big)\,;\\
\mathtt{dx}(p) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ p \mod 2=1\ \ \mathsf{then}\ \ \mathtt{hd}\big(\mathtt{hd}(p)\big)\ \ \mathsf{else}\ \ \mathtt{hd}\Big(\mathtt{hd}\big(\mathtt{tl}(p)\big)\Big)\ \ \mathsf{fi}\,.
\end{aligned}$$

Possiamo poi tradurre le operazioni monadiche $\bigcup, \mathcal{P}$ nelle seguenti $\mathtt{U}(\_), \mathtt{P}(\_)$:

$$\begin{aligned}
\mathtt{U}(p) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ p=0\ \ \mathsf{then}\ \ 0\ \ \mathsf{else}\ \ \mathtt{un}\Big(\mathtt{U}\big(\mathtt{tl}(p)\big),\mathtt{hd}(p)\Big)\ \ \mathsf{fi}\,,\\
\mathtt{S}(r,k,q) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ r=0\ \ \mathsf{then}\ \ k\ \ \mathsf{else}\ \ \mathtt{S}\big(\mathtt{tl}(r),k,q\big)+2^{\mathtt{hd}(r)+2^q}\ \ \mathsf{fi}\,,\\
\mathtt{P}(p) &=_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ p=0\ \ \mathsf{then}\ \ 1\ \ \mathsf{else}\ \ \mathtt{S}\Big(\mathtt{P}\big(\mathtt{tl}(p)\big),\mathtt{P}\big(\mathtt{tl}(p)\big),\mathtt{hd}(p)\Big)\ \ \mathsf{fi}\,.
\end{aligned}$$

Possiamo infine introdurre l'operazione di *scelta*

$$\mathtt{ch}(p) =_{\text{Def}} \ \mathsf{if}\ \ p\leqslant 1\ \ \mathsf{then}\ \ 0\ \ \mathsf{else}\ \ \mathtt{ch}\big(\mathtt{tl}(p)\big)+2^{\mathtt{hd}(\mathtt{hd}(p))}\ \ \mathsf{fi}\,,$$

che, *nel caso in cui* $\widehat{p}$ sia una PARTIZIONE, cioè un insieme di "*blocchi*" non vuoti a due a due disgiunti, restituisce la posizione di un insieme ad intersezione singola con ciascuno di tali blocchi.

9 Sottoinsiemi specificati intensionalmente

Quando da un insieme x traiamo gli elementi y che godono di una certa proprietà $\varphi(y)$, a formare il sottoinsieme

$$\{\, y \in x \mid \varphi(y) \,\}\,,$$

quest'ultimo si dice ottenuto per SEPARAZIONE.

Quali forme di specifica autorizzare, per $\varphi(\_)$? Quando, oggi, la teoria degli insiemi viene formalizzata come teoria assiomatica in un linguaggio predicativo $\mathcal{L}_{\in,=}$ del prim'ordine, generalmente si ammette che $\varphi(y)$ possa essere una *qualsiasi* formula di $\mathcal{L}_{\in,=}$: la variabile y vi figura generalmente libera.

Questo generoso criterio fu proposto dal matematico norvegese Skolem.[12] Prima di lui, in [14], Fraenkel[13] proponeva per $\varphi(y)$ due sole forme accettabili:

$$\sigma(y) \notin \tau(y), \qquad \sigma(y) \in \tau(y)\,,$$

dove $\sigma(\_)$ e $\tau(\_)$ sono espressioni che denotano insiemi secondo uno specifico linguaggio. In realtà basterebbe ammettere la prima di queste due forme, giacché vale banalmente che

$$\big\{y \in x \mid \sigma(y) \in \tau(y)\big\} \;=\; \big\{\,y \in x \mid y \notin \{y \in x \mid \sigma(y) \notin \tau(y)\}\,\big\}\,.$$

Dunque, se aderiamo al criterio di Fraenkel, è importante disporre della separazione "negativa": l'altra possiamo costruircela. La negativa può essere implementata, per gli insiemi ereditariamente finiti puri, ponendo

$$\begin{array}{lcl}
\mathtt{sp}\big(p,\, q \mapsto f(q),\, q \mapsto g(q)\big) & =_{\mathrm{Def}} & \textsf{if}\;\; p = 0 \;\;\textsf{then}\;\; 0 \;\;\textsf{else} \\
\mathtt{sp}\big(\mathtt{tl}(p),\, q \mapsto f(q),\, q \mapsto g(q)\big) & + & \mathtt{if}\;\mathtt{nin}\Big(f\big(\mathtt{hd}(p)\big), g\big(\mathtt{hd}(p)\big)\Big) \\
 & & \mathtt{then}\;\; 2^{\mathtt{hd}(p)} \;\;\textsf{else}\;\; 0 \;\;\textsf{fi}\;\;\textsf{fi}
\end{array}$$

(dove $\mathtt{nin}(p,q) \;=_{\mathrm{Def}}\; (\lfloor p/2^q \rfloor \mod 2 = 0)$); quella positiva indirettamente, come

$$\mathtt{sp}\Big(p,\, q \mapsto q,\, q \mapsto \mathtt{sp}\big(p,\, q \mapsto f(q),\, q \mapsto g(q)\big)\Big)\,.$$

Discorso analogo vale per lo schema di RIMPIAZZAMENTO, più generale di quello di separazione, che consente di ottenere un insieme

$$\{\,\vartheta(y) :\; y \in x \mid \varphi(y)\,\}$$

a partire da un insieme x, i cui elementi vengono dapprima filtrati in base a una condizione $\varphi(\_)$ e poi trasformati conforme ad un'espressione insiemistica $\vartheta(\_)$. Ammettendo per la specifica della condizione $\varphi(\_)$ lo stesso formato di Fraenkel visto sopra, abbiamo di nuovo la possibilità di ridurci al rimpiazzamento di tipo "negativo", in quanto

$$\big\{\vartheta(y) :\; y \in x \mid \sigma(y) \in \tau(y)\big\} \;=\; \big\{\,\vartheta(y) :\; y \in x \mid y \notin \{y :\; y \in x \mid \sigma(y) \notin \tau(y)\}\,\big\}\,.$$

Il rimpiazzamento negativo sarà implementato direttamente come

$$\begin{array}{lcl}
\mathtt{rp}\big(p,\, q \mapsto f(q),\, q \mapsto g(q),\, q \mapsto h(q)\big) & =_{\mathrm{Def}} & \textsf{if}\;\; p = 0 \;\;\textsf{then}\;\; 0 \;\;\textsf{elseif} \\
\mathtt{in}\Big(f\big(\mathtt{hd}(p)\big), g\big(\mathtt{hd}(p)\big)\Big) \vee & & \\
\mathtt{in}\Big(\mathtt{hd}(p), \mathtt{rp}\big(\mathtt{tl}(p),\, q \mapsto f(q),\, q \mapsto g(q),\, q \mapsto h(q)\big)\Big) & & \\
 & & \mathtt{then} \\
\mathtt{rp}\big(\mathtt{tl}(p),\, q \mapsto f(q),\, q \mapsto g(q),\, q \mapsto h(q)\big) & & \mathtt{else} \\
\mathtt{rp}\big(\mathtt{tl}(p),\, q \mapsto f(q),\, q \mapsto g(q),\, q \mapsto h(q)\big) & + & 2^{\mathtt{hd}(p)} \;\;\textsf{fi}
\end{array}$$

[12] Thoralf Albert Skolem, 1887–1963.
[13] Adolf Abraham Halevi Fraenkel, 1891–1965.

(dove $\mathtt{in}(p,q) \;=_{\text{Def}}\; (\lfloor p/2^q \rfloor \mod 2 = 1)$); quello positivo indirettamente, come

$$\mathtt{rp}\Big(p,\ q \mapsto q,\ q \mapsto \mathtt{rp}\big(p,\ q \mapsto f(q),\ q \mapsto g(q),\ q \mapsto q\big),\ q \mapsto h(q)\Big)\,.$$

Ripartendo dall'implementazione del rimpiazzamento, potremmo realizzare piú in breve i costrutti visti dalla Sez. 8 in qua: direttamente in termini del rimpiazzamento negativo, la `sp` e la `df`; in termini dello stesso (e ricorrendo alla `U` e alla formazione del paio per realizzare la `un`) la `sy`; in termini di rimpiazzamento positivo la `nt` e, con una ricorsione autonoma (cioè prescindente dalla `S` sopra impiegata *ad hoc*), la `P`; in termini di rimpiazzamento positivo, e sfruttando la `arb`, la `ch`.

Per vedere che il rimpiazzamento offre risorse in piú della separazione, consideriamo l'insieme infinito

$$Z_0 \;=_{\text{Def}}\; \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \big\{\{\{\emptyset\}\}\big\}, \dots\Big\}.$$

Tramite la separazione potremo formare un'infinità numerabile di sottoinsiemi di Z_0, ma non un insieme ad esso affine, quale

$$\Big\{2, \{2\}, \{\{2\}\}, \big\{\{\{2\}\}\big\}, \dots\Big\},$$

peraltro ottenibile per semplice rimpiazzamento come

$$\{\vartheta(x) :\ x \in Z_0 \mid x \notin \emptyset\}\,,$$

ove si prenda

$$\vartheta(X) \;=\; \mathsf{if}\;\; X = \{\mathsf{arb}(X)\} \;\; \mathsf{then} \;\; \{\vartheta(\mathsf{arb}(X))\} \;\; \mathsf{else} \;\; 2 \;\; \mathsf{fi}.$$

10 Emulazione di sovrastrutture in $\boldsymbol{\mathcal{V}}$

> *Ora discuteremo in modo informale gli assiomi, ma i nostri risultati sono rigorosi e potrebbero essere formalizzati. Se si lascia cadere l'assioma di estensionalità, il sistema che ne risulta può contenere atomi, cioè insiemi x tali che $\forall y(\sim y \in x)$ e tuttavia diversi tra loro. Una soluzione infatti sarebbe quella di considerare gli interi come atomi, e non come insiemi, e c'è chi sostiene che gli interi* sono *atomi. Ma anche in questo caso sarebbe opportuno evitare l'esistenza di atomi arbitrari. Comunque l'estensionalità vale per gli insiemi "genuini", e gli altri insiemi non sono che curiosità innocue. Fraenkel e Mostowski hanno usato gli atomi per ottenere certi risultati sull'assioma di scelta* $\cdots$
>
> [12, pag. 61]

Vedremo adesso come sia possibile, a partire da qualsiasi insieme B "genuino" (cioè tratto da $\boldsymbol{\mathcal{V}}$), formare una gerarchia cumulativa "funzionalmente equivalente" alla sovrastruttura $\mathcal{V}^B_\omega$ vista in Sez. 4, mascherando da individui gli elementi di B. Poiché gli elementi x di B sono quello che sono (cioè sono insiemi dalla struttura imprecisata), rimpiazziamo ciascuno di loro con la sua immagine $\bar{x} = \big\{\{x, B \cup \mathbb{N}\}\big\}$, dove la mappa

$$x \;\longmapsto\; \bar{x}$$

è chiaramente bijettiva. Scelti cosí, i corrispondenti degli elementi x di B vengono ad essere insiemi tutti dotati di pari rango (dato che il rango ϱ di $B \cup \mathbb{N}$ predomina sempre su quello di x); osserviamo che tale rango $(\varrho + 1) + 1$ eccede il rango di qualsiasi elemento della gerarchia pura $\mathcal{V}_\omega$ ($\subseteq \mathcal{V}_\omega^B$). Se nel costruire la gerarchia cumulativa impieghiamo a far le veci degli elementi x di B i loro corrispondenti insiemi $\bar{x}$ di rango elevato, la gerarchia verrà a comprendere insiemi di rango "basso" (cioè inferiore ad ω), che possiamo riguardare come "puri", da un lato, ed insiemi di rango "alto" (cioè superiore a $\varrho + 1$), dall'altro. Non accadrà dunque mai che uno di tali insiemi risulti membro di un qualche $\bar{x}$, ed è in questo senso che gli $\bar{x}$ si comportano (relativamente al resto della sovrastruttura) come degli individui.

11 Impiego emblematico della nozione di rango

Una situazione in cui il concetto di rango può tornare utile è quando si voglia estendere una relazione R inizalmente definita su un insieme S, i.e.

$$R \ \subseteq \ S \times S\,,$$

a tutta quanta la classe degli insiemi, preservandone certe proprietà. A titolo di esempio vedremo sotto come globalizzare una funzione "interruttore".

Premettiamo una distinzione di una certa importanza quando si ragiona sulla teoria degli insiemi: quella fra insieme e *classe*. Tutti gli insiemi sono classi, ma càpita a volte di dover considerare classi "troppo vaste"—basti qui un'allusione—perché si possa considerarle insiemi: le cosiddette CLASSI PROPRIE. Due classi proprie già occorse in queste note sono $\boldsymbol{\mathcal{O}}$, cioè a dire la classe di tutti gli ordinali, e $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, la classe di tutti gli insiemi: in effetti, riconoscere lo *status* d'insiemi a simili classi (consentendo loro di appartenere ad altre classi) condurrebbe presto a delle antinomie logiche.

Le parole *relazione* e *funzione* possiedono la stessa ambiguità di fondo della parola classe: se pensiamo alle relazioni come a *insiemi* di coppie ordinate, riconosceremo o no lo *status* di funzione a un'operazione come la $X \mapsto \mathcal{P}(X)$, che ha per dominio $\boldsymbol{\mathcal{V}}$? Evidentemente quest'ultima non è un insieme ma una *classe* di coppie ordinate, e poiché il suo operando spazia su tutti quanti gli insiemi, possiamo dirla una FUNZIONE GLOBALE. (Per contro chiameremo LOCALE una funzione f che abbia come dominio un insieme e che conseguentemente sia essa stessa un insieme). In molte occasioni, per essere piú espliciti, indicheremo con $f \restriction x$ l'immagine tramite una funzione *locale* f di un elemento x del suo dominio, e con $\varphi(x)$ l'immagine tramite una funzione globale φ di un insieme qualunque x.

Consideriamo ora una T che goda delle seguenti proprietà:

- T è una funzione, intesa come *insieme* di coppie ordinate tale che quando $p \in T$ e $q \in T$ hanno la stessa prima componente, $p^{[1]} = q^{[1]}$, allora anche la seconda componente è la stessa), $p^{[2]} = q^{[2]}$, cosicché in breve $p = q$;
- T è *autoinversa*: $\{\langle p^{[2]}, p^{[1]}\rangle \,:\, p \in T\} = T$;
- T è *antidiagonale*: $\{p \in T \mid p^{[1]} = p^{[2]}\} = \emptyset$.

La seconda e terza proprietà si possono esprimere asserendo che, per ogni x nel dominio di T,

$$T \restriction x \neq x \ \ \& \ \ T \restriction (T \restriction x) = x\,.$$

Chiamiamo INTERRUTTORE una simile funzione. È intuibile che su un dominio finito possiamo definire un interruttore solo a patto che il numero di elementi sia pari, mentre su di un insieme infinito un interruttore è definibile *sempre*.

Supponiamo di voler estendere all'intero universo di von Neumann il dominio di un interruttore T che ci è dato. In altre parole, vogliamo trovare una funzione globale $\mathsf{tog}(\_)$ tale che

$$\mathsf{tog}(x) = T \restriction x \text{ per ogni } x \text{ nel dominio di } T$$

e che soddisfi, anche quando x sta fuori di tale dominio, la condizione

$$\mathsf{tog}(x) \neq x \;\;\&\;\; \mathsf{tog}\big(\mathsf{tog}(x)\big) = x\,.$$

A tale scopo possiamo procedere cosí:

– Consideriamo gli infiniti singoletti

$$\{T\},\ \{\{T\}\},\ \{\{\{T\}\}\},\cdots$$

di ranghi crescenti tutti eccedenti $\mathsf{rk}(T)$.
– Osserviamo che l'unione λ di tali ranghi, in quanto rango di un insieme, risulta essere un ordinale...
– ...e che $\mathcal{V}_\lambda \setminus \mathsf{domain}(f)$, in quanto insieme infinito, possiede un interruttore $\bar{T}$.
– Per ogni insieme x, stipuliamo che

$$\mathsf{tog}(x) \;=\; \begin{cases} T \restriction x & \text{se } x \text{ è nel dominio di } T,\\ \bar{T} \restriction x & \text{se } x \text{ è nel dominio di } \bar{T},\\ (x \setminus 1) \cup (1 \setminus x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo esempio adombra costruzioni simili, ben piú poderose. Supponiamo, ad esempio, di voler imporre un ordine buono all'universo $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Possiamo vacuamente ordinare $\mathcal{V}_0$, mostrare poi come l'ordinamento $<_\beta$ di un livello $\mathcal{V}_\beta$ della gerarchia si possa prolungare in un ordinamento $<_{\beta+1}$ del successivo livello $\mathcal{V}_{\beta+1}$,[14] e come infine, quando λ è un ordinale limite, si possano amalgamare in un ordine buono $<_\lambda$ di $\mathcal{V}_\lambda$ tutti gli ordinamenti $<_\beta$ con β precedente λ, semplicemente ponendo $<_\lambda = \bigcup\{<_\beta :\ \beta \in \lambda\}$. A questo punto non rimarrà che constatare come gli ordinamenti cosí imposti ai diversi livelli della gerarchia vengano ad amalgamarsi naturalmente in un singolo ordinamento globale $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, che oltretutto concorda con il confronto fra ranghi. Manovrando opportunamente [7, pagg. 57–61], è facile rendere tale ordinamento *lessicografico* (v. Sez. 7) sugli insiemi finiti e far sí che, a parità di rango, gli insiemi finiti precedano quelli infiniti.

12 Universo dei costruibili di Gödel

> *Perhaps the shortest description of L is that it is the smallest transitive model of the axioms of $\mathsf{L_1}$Set which contains all the ordinals. But the working definition of L, from which the name "constructible universe" is derived, is rather different.*
>
> [23, pag. 149]

[14] Qui entra in gioco la ben nota conseguenza dell'assioma di scelta che qualunque insieme può essere ben ordinato. Per esempio, l'ordinamento di $<_{\omega+1}$ potrà essere ottenuto come unione dell'ordinamento lessicografico $<_\omega$ con un ordinamento $\lessdot$ di $\mathcal{V}_{\omega+1} \setminus \mathcal{V}_\omega$ di cui l'assioma di scelta garantisce l'esistenza e con la relazione $\{\,\langle u, v\rangle :\ u \in \mathcal{V}_\omega, v \in \mathcal{V}_{\omega+1} \setminus \mathcal{V}_\omega\,\}$.

Consideriamo le seguenti operazioni globali:

$$
\begin{array}{lll}
F_1(X,Y) & =_{\mathrm{Def}} & \{X,Y\}, \\
F_2(X,Y) & =_{\mathrm{Def}} & X \setminus Y\,, \\
F_3(X,Y) & =_{\mathrm{Def}} & X \times Y\,, \\
F_4(X) & =_{\mathrm{Def}} & \{u \,:\, \langle u,v\rangle \in X\}, \\
F_5(X) & =_{\mathrm{Def}} & \{\langle u,v\rangle \,:\, u \in X,\ v \in X \mid u \in v\}, \\
F_6(X) & =_{\mathrm{Def}} & \{\langle\langle u,v\rangle,w\rangle \,:\, \langle\langle v,w\rangle,u\rangle \in X\}, \\
F_7(X) & =_{\mathrm{Def}} & \{\langle\langle u,v\rangle,w\rangle \,:\, \langle\langle w,v\rangle,u\rangle \in X\}, \\
F_8(X) & =_{\mathrm{Def}} & \{\langle\langle u,v\rangle,w\rangle \,:\, \langle\langle u,w\rangle,v\rangle \in X\}.
\end{array}
$$

Si può dimostrare che ogni insieme S della gerarchia $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ di von Neumann ha un soprainsieme chiuso rispetto a queste otto operazioni, per cui esso avrà un soprainsieme $\Im(S)$ parimente chiuso e minimale rispetto all'inclusione. Possiamo dunque sfruttare una costruzione simile a quella di $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, ma a “crescita lenta”, per ottenere la seguente GERARCHIA DEI COSTRUIBILI:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{L}_\alpha =_{\mathrm{Def}} \bigcup \left\{ \mathcal{P}(\mathcal{L}_\beta) \cap \Im(\mathcal{L}_\beta \cup \{\mathcal{L}_\beta\}) : \beta \in \alpha \right\} & \text{per ogni ordinale } \alpha\,, \\
\boldsymbol{\mathcal{L}} =_{\mathrm{Def}} \bigcup_{\boldsymbol{\mathcal{O}}(\alpha)} \mathcal{L}_\alpha\,. &
\end{array}
$$

Questa si sviluppa esattamente come la gerarchia di Ackermann fino al primo ordinale infinito ω, ma comincia a patire della limitazione di cardinalità

$$
|\mathcal{L}_\alpha| \;=\; |\alpha| \qquad \text{quando } \omega < \alpha
$$

(per cui $\mathcal{L}_\alpha \subsetneq \mathcal{V}_\alpha$) una volta che si oltrepassi detta soglia.

La $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ ha, a parte questa limitazione di crescita, vari tratti in comune con la $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, primo fra tutti di essere effettivamente una gerarchia, nel senso che ciascun $\mathcal{L}_\alpha$ è transitivo ed è strettamente incluso in ciascun $\mathcal{L}_\gamma$ per il quale $\alpha < \gamma$. È facile osservare che vale in generale $\mathcal{L}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\alpha$ (dove l'inclusione è stretta non appena α superi ω) e che $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, abbracciando come suoi elementi tutti gli ordinali, è una classe propria. Riguardo alla questione

$$
\boldsymbol{\mathcal{L}} \;=\; \boldsymbol{\mathcal{V}}\ ?
$$

la teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel non si pronuncia in senso affermativo né negativo; si può tuttavia *imporre* ch'essa abbia risposta affermativa legiferando tramite uno specifico POSTULATO DI COSTRUIBILITÀ [24] che, come beneficio collaterale, renderà dimostrabile la cosiddetta IPOTESI GENERALIZZATA DEL CONTINUO [12], in merito alla cui verità gli usuali assiomi non hanno potere di decidere.

13 Sintesi automatica di universi d'insiemi

Consideriamo una struttura $\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\varnothing}, \in, \oplus, \ominus$ costituita da cinque componenti cosí interrelate:

- $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ è *dominio del discorso* e $\boldsymbol{\varnothing}$ sta in tale dominio;
- $\in$ è una relazione binaria su di $\boldsymbol{\mathcal{U}}$;
- $\oplus$, $\ominus$ sono operazioni che associano a qualunque coppia di operandi x, y tratti da $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ risultati $x \oplus y$ ed $x \ominus y$ appartenenti ad $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Intuitivamente parlando, vogliamo che la struttura in questione soddisfi quei requisiti minimi che chiunque si aspetta debbano valere per insiemi rannidati. In quest'ottica $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ rappresenta la totalità dei cosiddetti "insiemi", $\in$ (che, si noti, può non essere la solita $\in$) ha il ruolo di relazione di "appartenenza" intercorrente fra tali entità, $\boldsymbol{\emptyset}$ funge da "vuoto", $\oplus$ ed $\ominus$ fungono da operazioni di aggiunta / rimozione di un singolo elemento a / da un insieme. Per semplicità lasciamo gli urelementi fuori da ogni nostra considerazione.

Le proprietà formali "di minima" che vogliamo soddisfatte dalla nostra struttura sono le seguenti; che, se rispettate, faranno della cinquina, un UNIVERSO DI INSIEMI, per definizione. Quali che siano X, Y in $\boldsymbol{\mathcal{U}}$:

1. X non precede $\boldsymbol{\emptyset}$ in $\in$.
2. Se diversi, X ed Y non potranno avere gli stessi predecessori immediati in $\in$; cioè a dire, qualche v in $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ testimonierà della loro differenza soddisfacendo una ma non l'altra delle due relazioni $v \in X,\ \ v \in Y$.
3. Le entità v in $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ che soddisfano $v \in (X \oplus Y)$ sono quelle stesse per cui vale $v \in X$, *piú* (eventualmente, se è falso che $Y \in X$) la $v = Y$.
4. Le entità v in $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ che soddisfano $v \in (X \ominus Y)$ sono quelle stesse per cui vale $v \in X$, *eccettuata* (se $Y \in X$) la $v = Y$.

Un siffatto universo di insiemi si dirà poi COMPUTABILE se

- c'è un universo di Herbrand $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}$ tale che per ciascun elemento v di $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}$ si può algoritmicamente stabilire se v appartiene ad $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ oppure no;
- le operazioni $\oplus$, $\ominus$ sono calcolabili;
- su di $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ è calcolabile un'operazione binaria $\boldsymbol{\eta}$ tale che per X, Y in $\boldsymbol{\mathcal{U}}$:
  - se $Y \neq \boldsymbol{\emptyset}$, allora sussiste almeno una delle due relazioni $(X \boldsymbol{\eta} Y) \in X$, $(Y \boldsymbol{\eta} X) \in Y$;
  - quando le relazioni $(X \boldsymbol{\eta} Y) \in X$, $(X \boldsymbol{\eta} Y) \in Y$ sussistono entrambe, allora $X = Y$.

Un UNIVERSO DI CLASSI (computabile o meno) viene definito in maniera analoga; ma il suo dominio del discorso è suddiviso come

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}_0} \cup \boldsymbol{\mathcal{U}_1},$$

dove $\boldsymbol{\mathcal{U}_0}$ e $\boldsymbol{\mathcal{U}_1}$ sono domini disgiunti e dove nell'effettuare le operazioni $X \oplus Y$ ed $X \ominus Y$ si insiste che Y deve appartenere a $\boldsymbol{\mathcal{U}_0}$. L'idea è che $\boldsymbol{\mathcal{U}_0}$ sia costituito dagli "insiemi" ed $\boldsymbol{\mathcal{U}_1}$ dalle "classi proprie": dunque, la limitazione imposta ad $\oplus$ (e, cosa meno significativa, a $\ominus$) riflette l'idea intuitiva che "le classi proprie sono troppo grandi per poter appartenere come elementi ad altre classi (o, come caso particolare, a insiemi)".

Esempio. Possiamo prendere come dominio del discorso la famiglia $\mathcal{V}_\omega$ degli insiemi ereditariamente finiti puri estesa con tutti i complementi, in $\mathcal{V}_\omega$ stessa, di tali insiemi:

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} \;\; = \;\; \mathcal{V}_\omega \cup \{\mathcal{V}_\omega \setminus x : \, x \in \mathcal{V}_\omega\}\,;$$

prendere, inoltre, come $\boldsymbol{\emptyset}$, $\in$, $\oplus$, $\ominus$ gli usuali $\emptyset$, $\in$, $(X, Y) \mapsto X \cup \{Y\}$, $(X, Y) \mapsto X \setminus \{Y\}$, riguardando i cofiniti come le *classi* proprie (cui è negato, di conseguenza, poter comparire a secondo argomento delle operazioni di aggiunta e rimozione singola).

Per generare l'universo $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}$ utilizzeremo i costrutti della segnatura

$$\boldsymbol{\emptyset}_{/0}, \qquad \boldsymbol{\infty}_{/0}, \qquad \boldsymbol{w}_{/2}\,, \qquad \boldsymbol{\ell}_{/2}$$

(dove $\boldsymbol{\infty}$ rappresenta $\mathcal{V}_\omega$ e $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\ell}$ rappresentano le operazioni $\oplus$, $\ominus$), e fra i termini di tale universo eleggeremo designazioni canoniche per gli insiemi finiti $\{x_1, \ldots, x_k\}$ e cofiniti $\mathcal{V}_\omega \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$, per esempio insistendo che gli x_i si susseguano in ordine lessicografico (v. Sezioni 3 e 7).

Non è problematico implementare una $\boldsymbol{\eta}$ soddisfacente i requisiti indicati sopra.

Si noti come l'$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ che stiamo considerando non sia chiuso rispetto alla separazione: se in certi casi, come quelli di

$$\{\, x \in \mathcal{V}_\omega \mid x \notin x \,\} \;(=\; \mathcal{V}_\omega) \text{ e di } \{\, x \in \mathcal{V}_\omega \mid x \in x \,\} \;(=\; \emptyset),$$

l'aggregato ottenuto per separazione da una classe propria è a sua volta una classe, ciò non avviene in infiniti altri casi, come quelli di

$$\{\, x \in \mathcal{V}_\omega \mid \emptyset \notin x \,\} \text{ e di } \{\, x \in \mathcal{V}_\omega \mid \emptyset \in x \,\},$$

dove il requisito di finitezza-o-cofinitezza vien meno. $\square$

[29] dà la specifica di un algoritmo di sintesi che genera un universo computabile $\boldsymbol{\mathcal{M}} = (\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\emptyset}, \boldsymbol{\in}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\ell})$ di insiemi a partire da un enunciato, ricevuto in input, della forma

$$\exists\, y_1 \cdots \exists\, y_n \,\forall\, x\; \varphi(y_1, \ldots, y_n, x),$$

dove la formula $\varphi \equiv \varphi(y_1, \ldots, y_n, x)$ è priva di quantificatori e costituita a partire dalle sole variabili $y_1, \ldots, y_n, x$ mediante i relatori $\in, =$ e i connettivi proposizionali. Oltre ad essere computabile, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ è tale da consentire il calcolo di qualunque funzione totale si possa specificare nella forma

$$\varepsilon\, x\; \psi(y_1, \ldots, y_m, x)$$

(ove la formula ψ ha struttura analoga a quella di φ): tale calcolo presuppone in input l'assegnazione

$$y_1 \mapsto v_1, \ldots, y_m \mapsto v_m$$

di $\boldsymbol{\mathcal{M}}$-insiemi v_j ai parametri formali y_j.

L'algoritmo di sintesi deve, prima di poter generare l'universo $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, accertare la conciliabilità del vincolo $\exists y_1 \cdots \exists y_n \forall x\; \varphi$ cui è sottoposto con le suelencate proprietà 1.–4. caratterizzanti un universo di insiemi; a tale scopo incorpora un algoritmo di decisione. Vincoli insoddisfacibili sono, per esempio, $\exists\, y \,\forall\, x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$ ed $\exists\, y \,\forall\, x\, y \notin x$; paradigmatici, invece, della potenza dell'algoritmo di sintesi, sono i seguenti vincoli soddisfacibili:

$$\begin{array}{l}
\exists\, y_0 \cdots \exists\, y_n \,\forall\, x \Big(\big(\bigwedge_{0 \leqslant i < j \leqslant n} y_i \neq y_j \big) \;\&\; \bigwedge_{i=0}^{n} (x \in y_i \leftrightarrow x = y_i) \Big), \\
\exists\, y \,\forall\, x\; y \notin x, \\
\exists\, y_0 \cdots \exists\, y_h \,\exists\, y_{h+1} \cdots \exists\, y_n \,\forall\, x \Big(\big(\bigvee_{i=0}^{h} x \in y_i \big) \;\leftrightarrow\; \bigwedge_{j=h+1}^{n} x \neq y_j \Big), \\
\exists\, y_0 \,\exists\, y_1 \,\exists\, y_2 \,\forall\, x \; \big(x \notin y_0 \;\&\; (x \in y_1 \leftrightarrow y_0 \in x) \;\&\; (x \in y_2 \leftrightarrow y_0 \notin x) \big),
\end{array}$$

che esprimono, nell'ordine: esistenza di almeno $n+1$ autosingoletti; esistenza di un insieme di tutti gli insiemi; esistenza di $h+1$ insiemi che coprono quasi per intero l'universo degli insiemi; esistenza di un insieme formato da tutti gli insiemi cui appartiene il vuoto, e del suo complemento.

14 Iperinsiemi finiti razionali

Riprendiamo qui la costruzione tratteggiata in [9, pagg. 96–97] di un universo computabile di insiemi (v. Sez. 13), rimandando il lettore a [30] per spiegazioni piú dettagliate. In piccolo, la costruzione che proporremo ricalca quella fornita da Aczel [2] per ottenere dall'universo di tutti gli insiemi l'universo—ancora piú grande—degli *iperinsiemi.* [15] Sul piano formale, gli iperinsiemi di Aczel rispecchiano tutte le proprietà degli insiemi ordinari tranne una: mentre fra questi ultimi la relazione di appartenenza è (stando ai tradizionali assunti) ben fondata, sul piú vasto universo degli iperinsiemi essa è tenuta a contravvenire alla buona fondatezza in ogni modo possibile, per esempio formando cicli di qualsiasi lunghezza. Cercando di essere—anche a questo livello intuitivo di esposizione—piú chiari, associamo ad ogni insieme/iperinsieme ξ il grafo *trans*(ξ) avente

- come nodi, tutti quegli ζ tali che esista una catena di appartenenze $\zeta \in \cdots \in \xi$ (lunga 0,1 o piú) che conduce da ζ a ξ;
- come archi, quelle coppie $\langle \zeta_0, \zeta_1 \rangle$ di tali nodi che soddisfano la relazione $\zeta_0 \in \zeta_1$.

Classifichiamo inoltre ξ come insieme quando *trans*(ξ) non ha percorsi di lunghezza infinita, e come iperisieme in senso stretto nel caso contrario.

L'universo (di von Neumann) degli insiemi è ricco abbastanza affinché, dato un grafo G sprovvisto di percorsi infiniti e nel quale sia stato evidenziato un *pozzo* $\nu_\star$ (nodo, dunque, raggiungibile in G a partire da qualsiasi altro nodo), si possano trovare un insieme ξ ed un isomorfismo fra *trans*(ξ) e G (che renda l'appartenenza tramite gli archi e faccia corrispondere $\nu_\star$ a ξ), *purché* in G non vi siano due nodi con i medesimi predecessori immediati. L'ultimo requisito riflette il *postulato di estensionalità*, in base al quale non possono aversi due insiemi con i medesimi elementi.

L'universo (di Aczel) degli iperinsiemi soddisfa un simile principio di "ricchezza"—non piú limitato dal requisito della finitezza dei percorsi—, ma è concepito in modo da riflettere una cauta variante dell'estensionalità tale da assicurare, ad es., che quando ξ_b è l'unico membro di ξ_b per $b = 0, 1$, allora ξ_0 non può differire da ξ_1. Essere piú chiari a questo riguardo sarà possibile solo portando in scena le *bisimulazioni*.[16] Per loro tramite, in effetti, sarà facile esprimere quale (rafforzata) condizione di estensionalità un grafo puntato $\langle G, \nu_\star \rangle$ sia tenuto a rispettare affinché vi sia un iperinsieme ξ con *trans*(ξ) isomorfo a G (ciò implica, incidentalmente, che $\nu_\star$ sia un pozzo): non dovranno esservi bisimulazioni fra due sottografi pieni $\langle G_0, \nu_\star^0 \rangle$, $\langle G_1, \nu_\star^1 \rangle$ di G di cui $\nu_\star^0, \nu_\star^1$ sono i rispettivi pozzi.

Ci occupiamo qui solo di iperinsiemi *ereditariamente finiti e razionali*, cioè di iperinsiemi ξ aventi finita sia la cardinalità che l'altezza di *trans*(ξ).[17] Queste *assunzioni di finitudine* derivano dalla nostra volontà di considerare gli iperinsiemi come una struttura-dati algoritmica.

In estrema sintesi, la costruzione del nostro universo $\overline{\mathcal{V}}_\omega$ di iperinsiemi procede cosí:

[15] La parola 'iperinsieme', tratta da [3], sostituisce qui la locuzione 'insieme non-ben-fondato' di Aczel.

[16] Il concetto di bisimulazione—ed il vocabolo stesso—scaturirono da studi svolti da Milner e Park (cfr. [33]) sulla semantica dei processi concorrenti. Si possono individuare altri scopritori indipendenti, piú o meno contemporanei, del medesimo concetto: fra di loro Johan van Benthem [5,6], che chiamò le bisimulazioni *pi-morfismi.*

[17] Per *altezza* di un grafo intendiamo la lunghezza massima di un percorso nel grafo in cui nessun nodo compaia piú volte.

1. Consideriamo le coppie ordinate $\langle h,k\rangle$ in $\mathcal{V}_\omega$ e, fra di esse, la relazione binaria
$$G \;=_{\text{Def}}\; \{\, \langle\langle h,k_0\rangle, \langle h,k_1\rangle\rangle \,:\, \langle k_0,k_1\rangle \in h \,\}\,.$$
Stabiliamo poi che la relazione $\langle h_0,k_0\rangle \overset{G}{\sim} \langle h_1,k_1\rangle$ valga sse c'è una BISIMULAZIONE B su G tale che $\langle h_0,k_0\rangle B \langle h_1,k_1\rangle$. Ciò significa che B è una relazione simmetrica fra nodi soddisfacente la condizione
$$\big\langle \forall u,v,w \mid uBvGw \longrightarrow \langle \exists\, z \mid zBw \,\&\, uGz\rangle\big\rangle.$$
È facile il riscontro che $\overset{G}{\sim}$ è lei stessa una bisimulazione, dunque la bisimulazione piú grande rispetto a $\subseteq$, su G; per di piú, $\overset{G}{\sim}$ è una relazione di equivalenza.
2. Consideriamo poi, fra i blocchi $[\langle h,k\rangle]_{\overset{G}{\sim}}$, in breve $[h,k]_{\overset{G}{\sim}}$, nei quali $\mathcal{V}_\omega \times \mathcal{V}_\omega$ viene suddiviso da $\overset{G}{\sim}$:
$$[h_0,k_0]_\sim \;=_{\text{Def}} \{\langle h_1,k_1\rangle \,:\, h_1 \in \mathcal{V}_\omega, k_1 \in \mathcal{V}_\omega, \langle h_0,k_0\rangle \overset{G}{\sim} \langle h_1,k_1\rangle\}\,,$$
la relazione $\overline{G}$ che consiste di tutte le coppie $\langle\, [h,k_0]_{\overset{G}{\sim}}, [h,k_1]_{\overset{G}{\sim}}\rangle$ che hanno $\langle k_0,k_1\rangle \in h$.
3. I blocchi di $\mathcal{V}_\omega \times \mathcal{V}_\omega \,/\, \overset{G}{\sim}$ formano il dominio del discorso del nostro universo $\overline{\mathcal{V}}_\omega$ degli IPERINSIEMI, sopra il quale $\overline{G}$ funge da inversa $\ni$ della relazione di appartenenza.
4. $\overline{\mathcal{V}}_\omega$ comprende entità che possiamo identificare con gli insiemi ordinari. Si tratta di quei blocchi che possiamo scrivere nella forma $[h,q]_{\overset{G}{\sim}}$, dove h è costituito dalle coppie $\langle k_1,k_0\rangle$ per le quali in $\mathcal{V}_\omega$ c'è una catena $k_0 \in k_1 \in k_2 \in \cdots \in k_{n+1} = q$ (con n arbitrariamente grande, ancorché (ovviamente) finito). Si noti, in effetti, che quando $[h_0,q_0]_{\overset{G}{\sim}}$ ed $[h_1,q_1]_{\overset{G}{\sim}}$ sono blocchi di questa fatta allora $[h_0,q_0]_{\overset{G}{\sim}} \in [h_1,q_1]_{\overset{G}{\sim}}$ vale in $\overline{\mathcal{V}}_\omega$ sse $q_0 \in q_1$ vale nel senso ordinario, i.e. è vera in $\mathcal{V}_\omega$.
5. (Lasciamo al lettore la definizione di $\boldsymbol{\emptyset}, \oplus, \ominus$ appropriata per $\mathcal{V}_\omega$).

(Si noti che la questione principale interveniente nella nozione di iperinsieme, ossia determinare le coppie μ,ν di nodi di un dato grafo G fra le quali sussiste la relazione $\mu \overset{G}{\sim} \nu$, è inquadrabile nel *problema relazionale della partizione piú grossolana* affrontato in [20]. In [32] venne proposto un algoritmo in grado di risolvere questo problema in tempo $\mathcal{O}(|E| \cdot \ell og\,|N|)$ e spazio $\mathcal{O}(|E| + |N|)$, dove E,N sono l'insieme degli archi e l'insieme dei nodi di G, rispettivamente).

15 La "proto" gerarchia cumulativa di Fraenkel

Fraenkel [14], riferendosi al sistema assiomatico proposto da Zermelo in [38], dimostrò l'indipendenza dell'assioma della scelta dai rimanenti assiomi della teoria degli insiemi.

La dimostrazione si svolge tramite la costruzione di un universo $\mathfrak{B}$ di oggetti che, come illustriamo qui sotto, si può descrivere in modo naturale come una gerarchia cumulativa, e piú precisamente come una gerarchia di gerarchie di insiemi.[18]

L'universo $\mathfrak{B}$ si costruisce a partire da

- l'insieme vuoto $\emptyset$,
- un'infinità numerabile di individui $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \ldots,$

[18] Essendo costituito da descrizioni sintattiche, $\mathfrak{B}$ risulterà chiaramente numerabile; quindi $\mathfrak{B}$ è un modello "piccolo" degli assiomi di Zermelo. Il dominio del discorso tratteggiato in [38], per contro, viene caratterizzato in termini generali come formato da oggetti (insiemi e individui) che rispettano certe leggi sull'appartenenza; dunque esso è soggetto agli assiomi di Zermelo, senza essere esplicitamente riferito ad alcuna gerarchia d'insiemi.

– l'insieme $Z_0 = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\Big\}$,
– l'insieme $A = \big\{\{a_1, \bar{a}_1\}, \{a_2, \bar{a}_2\}, \dots\big\}$,

introducendo via via tutti gli insiemi che si possono ottenere da queste entità iniziali mediante un numero finito di applicazioni dell'Assioma II (degli insiemi elementari), dell'Assioma III (di separazione), dell'Assioma IV (dell'insieme potenza) e dell'Assioma V (dell'unione).

Si dimostra quindi (v. il *Teorema Fondamentale* in [14]) che ogni insieme M di $\mathfrak{B}$ è *simmetrico* negli elementi $\{a_k, \bar{a}_k\}$ dell'insieme A, salvo un numero finito di essi; ciò significa che, se $\overline{M}^k$ è il risultato dello scambio di a_k con $\bar{a}_k$ e di $\bar{a}_k$ con a_k in M, allora vale $\overline{M}^k = M$. Pertanto $\mathfrak{B}$ non può contenere alcun insieme di scelta di A, il che dimostra che l'assioma della scelta non vale per $\mathfrak{B}$.

Gli Assiomi II, IV e V sono formulati come in [38] mentre, riguardo all'Assioma III, Fraenkel sente la necessità di rendere più precisa la formulazione di Zermelo introducendo la nozione di *funzione* (v. Sez. 9 per una discussione della versione di Fraenkel dell'Assioma III e per un raffronto con altre piú recenti versioni).

Per dirla informalmente, le funzioni sono determinate da *descrizioni* di costruzioni di insiemi (come ad esempio $\bigcup\bigcup A$, che è una descrizione dell'insieme vuoto), sostituendo un oggetto costante con una variabile. Per esempio, $\varphi(x) = \{\{x\}\}$ è la funzione corrispondente alla descrizione $\varphi = \{\{\emptyset\}\}$ del singoletto costituito dal singoletto dell'insieme vuoto, dove $\emptyset$ viene sostituito con x.

Assioma III([14]). Sia dato un insieme M unitamente a due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, in un ordine definito; allora M possiede un sottoinsieme M' (rispettivamente M'') contenente quali elementi tutti gli elementi $m \in M$ per cui $\varphi(m)$ è un elemento di $\psi(m)$ (rispettivamente $\varphi(m)$ non è un elemento di $\psi(m)$) e nessun altro.

Le descrizioni si possono definire ricorsivamente come segue.

– $Z_0, A, \emptyset, a_i, \bar{a}_i$ (con $i \in \mathbb{N}$) sono descrizioni di classe 0;
– se φ, ψ sono descrizioni di classe non superiore a p, allora le descrizioni $\{\varphi, \psi\}$ (Assioma II), $\mathcal{P}(\varphi)$ (Assioma IV), e $\bigcup(\varphi)$ (Assioma V) sono di classe p;
– se χ, φ, ψ sono descrizioni di classe non superiore a p, allora la descrizione $\{x \in \chi \mid \varphi(x) \in \psi(x)\}$ (rispettivam. $\{x \in \chi \mid \varphi(x) \notin \psi(x)\}$), dove $\varphi(x)$ è una funzione ottenuta da φ sostituendo un oggetto costante (primitivo se $p = 0$) con x e $\psi(x)$ è una funzione ottenuta da ψ sostituendo un oggetto costante (primitivo se $p = 0$) con x, è di classe $p + 1$.[19]

Dalla precedente definizione di descrizione segue che ogni insieme in $\mathfrak{B}$ può avere numerose descrizioni differenti (per esempio $\mathcal{P}(\emptyset)$ e $\{\emptyset\}$ sono entrambe descrizioni del singoletto costituito dall'insieme vuoto). Identificando tutti gli insiemi di $\mathfrak{B}$ con tutte le loro descrizioni, vedremo ora come $\mathfrak{B}$ si possa costruire come una gerarchia di gerarchie di descrizioni di insiemi.

La suddivisione delineata sopra delle descrizioni in classi viene sfruttato nella definizione stessa della gerarchia: costruiamo una gerarchia $\mathfrak{B}_0$ per le descrizioni di classe 0,

[19] Richiediamo che, se $p > 0$, gli oggetti costanti sostituiti in φ e ψ siano di classe inferiore a p oppure non siano i soli rappresentanti di classe p in χ, φ e ψ. Questo vale anche per la costruzione delle gerarchie intermedie $\mathfrak{B}_p$ come delineato di seguito.

una gerarchia $\mathfrak{B}_1$ per le descrizioni di classe 1 e cosí via. La gerarchia finale $\mathfrak{B}$ risulterà dall'unione di tutti i livelli di tutte le gerarchie di classe finita.

Designando con $L^0_{\mathfrak{B}_i}, L^1_{\mathfrak{B}_i}, \ldots$ i livelli delle gerarchie intermedie $\mathfrak{B}_i$, la costruzione complessiva viene illustrata qui di seguito.

- La gerarchia $\mathfrak{B}_0$ ha la seguente costruzione:

$$\begin{aligned}
L^0_{\mathfrak{B}_0} &= \{\emptyset, Z_0, A, a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \ldots\},\\
L^1_{\mathfrak{B}_0} &= L^0_{\mathfrak{B}_0} \cup \big\{\{\varphi,\psi\} : \varphi,\psi \in L^0_{\mathfrak{B}_0}\big\} \cup \big\{\mathcal{P}(\varphi) : \varphi \in L^0_{\mathfrak{B}_0}\big\} \cup \big\{\bigcup\varphi : \varphi \in L^0_{\mathfrak{B}_0}\big\},\\
L^2_{\mathfrak{B}_0} &= L^1_{\mathfrak{B}_0} \cup \big\{\{\varphi,\psi\} : \varphi,\psi \in L^1_{\mathfrak{B}_0}\big\} \cup \big\{\mathcal{P}(\varphi) : \varphi \in L^1_{\mathfrak{B}_0}\big\} \cup \big\{\bigcup\varphi : \varphi \in L^1_{\mathfrak{B}_0}\big\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Per $p \geqslant 0$, $\mathfrak{B}_{p+1}$ si ottiene da $\mathfrak{B}_p$ nel modo seguente.
  Per ogni $i = 0, 1, \ldots$, sia $H^i_{\mathfrak{B}_{p+1}}$ la collezione di tutti gli insiemi $\{x \in \chi \mid \varphi(x) \in \psi(x)\}$, $\{x \in \chi \mid \varphi(x) \notin \psi(x)\}$ tali che χ appartenga ad $L^i_{\mathfrak{B}_p}$ e $\varphi(x)$, $\psi(x)$ siano ottenuti da qualche descrizione φ, ψ in $L^i_{\mathfrak{B}_p}$, sostituendo x ad un oggetto primitivo (se $p = 0$) oppure ad una costante (nel caso sia $p > 0$). I livelli di $\mathfrak{B}_{p+1}$ sono allora

$$\begin{aligned}
L^0_{\mathfrak{B}_{p+1}} &= H^0_{\mathfrak{B}_{p+1}},\\
L^1_{\mathfrak{B}_{p+1}} &= H^1_{\mathfrak{B}_{p+1}} \cup \big\{\{\varphi,\psi\} : \varphi,\psi \in L^0_{\mathfrak{B}_{p+1}}\big\} \cup \big\{\mathcal{P}(\varphi) : \varphi \in L^0_{\mathfrak{B}_{p+1}}\big\} \cup \big\{\bigcup\varphi : \varphi \in L^0_{\mathfrak{B}_{p+1}}\big\},\\
L^2_{\mathfrak{B}_{p+1}} &= H^2_{\mathfrak{B}_{p+1}} \cup \big\{\{\varphi,\psi\} : \varphi,\psi \in L^1_{\mathfrak{B}_{p+1}}\big\} \cup \big\{\mathcal{P}(\varphi) : \varphi \in L^1_{\mathfrak{B}_{p+1}}\big\} \cup \big\{\bigcup\varphi : \varphi \in L^1_{\mathfrak{B}_{p+1}}\big\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Infine, $\mathfrak{B}$ si ottiene da $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots$ ponendo, per $i = 0, 1, \ldots,$

$$L^i_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{p=0}^{\infty} L^i_{\mathfrak{B}_p}.$$

Ad ogni descrizione φ della gerarchia $\mathfrak{B}$ è possibile associare una coppia $\mathrm{cl}(\varphi), \mathrm{lv}(\varphi)$ di numeri che indicano la minima gerarchia intermedia e il minimo livello della gerarchia che contiene φ. Quindi $\mathrm{cl}(\varphi)$ e $\mathrm{lv}(\varphi)$ si possono calcolare ricorsivamente sulla struttura di φ come segue:

1. $\mathrm{cl}(\varphi) = 0$ e $\mathrm{lv}(\varphi) = 0$, per ogni oggetto primitivo φ.
2. Se $\varphi = \{\psi, \chi\}$, allora
   (2a) $\mathrm{cl}(\varphi) = \max\{\mathrm{cl}(\psi), \mathrm{cl}(\chi)\}$ e
   (2b) $\mathrm{lv}(\varphi) = \max\big\{\mathrm{lv}(x) : x \in \{\psi,\chi\} \mid \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(\varphi)\big\} + 1$.
3. Se $\varphi = \bigotimes\psi$, dove $\bigotimes \in \big\{\mathcal{P}, \bigcup\big\}$, allora
   (3a) $\mathrm{cl}(\varphi) = \mathrm{cl}(\psi)$ e
   (3b) $\mathrm{lv}(\varphi) = \mathrm{lv}(\psi) + 1$.
4. Se $\varphi = \{x \in \psi \mid \chi(x) \in \xi(x)\}$ oppure $\varphi = \{x \in \psi \mid \chi(x) \notin \xi(x)\}$, allora
   (4a) $\mathrm{cl}(\varphi) = \max\{\mathrm{cl}(\psi), \mathrm{cl}(\chi), \mathrm{cl}(\xi)\} + 1$ e
   (4b) $\mathrm{lv}(\varphi) = \max\big\{\mathrm{lv}(x) : x \in \{\psi,\chi,\xi\} \mid \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(\varphi)\big\}$.

Quale semplice esempio, si consideri $\varphi = \{x \in Z_0 \mid \emptyset \in x\}$ (rispettivamente, $\varphi' = \{x \in Z_0 \mid \emptyset \notin x\}$) che descrive l'insieme $\{\{\emptyset\}\}$ (rispettivam. $Z_0 \setminus \{\{\emptyset\}\}$). È facile verificare che $\mathrm{cl}(\varphi) = 1$ e $\mathrm{lv}(\varphi) = 0$ (rispettivam., $\mathrm{cl}(\varphi') = 1$ e $\mathrm{lv}(\varphi') = 0$).

Ci si può chiedere se l'applicazione reiterata dell'assioma dell'unione, che ha effetti distruttivi (ad esempio $\bigcup^{(i)} A$ è, per $i \geqslant 2$, una descrizione dell'insieme vuoto), porti ad un livello di "stabilizzazione" della gerarchia oltre il quale non verrà piú generato alcun nuovo insieme. In effetti, si può facilmente verificare che tale livello di stabilizzazione non esiste: per esempio, nella costruzione del livello $k + 1$ a partire dal precedente livello k, si generano sempre $\mathcal{P}^{k+1}(A)$ e $\mathcal{P}^{k+1}(Z_0)$, i quali descrivono insiemi non ottenibili ai precedenti livelli della gerarchia.

Analogamente, non avviene stabilizzazione di classe. In effetti, ogni classe comprende descrizioni di insiemi che non possono essere stati descritti in classi precedenti. Per esempio, si consideri per $i \geqslant 1$ la descrizione $\mathcal{P}^{(i)}(\bigcup A)$ di classe 0 e livello $i + 1$, da cui per separazione si ottiene $X_1 = \{x \in \mathcal{P}^{(i)}(\bigcup A) \mid \{a_1\}^{(i-1)} \notin x\}$ di classe 1 e livello $i + 1$, e, piú in generale, per $j \geqslant 2$, l'insieme $X_j = \{x \in X_{j-1} \mid \{a_j\}^{(i-1)} \notin x\}$ di classe j e livello $i+1$. Ogni X_j descrive un insieme che non può venir prodotto con meno di j applicazioni dell'Assioma III.[20]

Chiudiamo questa sezione menzionando il seguente problema degno di nota, sul quale stiamo indagando: c'è un algoritmo per stabilire, di due descrizioni tratte dalla gerarchia presentata qui sopra, se esse denotino o no lo stesso insieme?

16 Scenari Referee sulle gerarchie cumulative

Referee ('Ref' per brevità, o talvolta 'ÆtnaNova'), vedi [8,11,28,10] e
http://www.settheory.com/Setl2/Ref_user_manual.html ,
è un verificatore di correttezza delle dimostrazioni basato sulla teoria degli insiemi. Grazie alla potenza di tale teoria di supporto, non è rivolto a una nicchia specifica della matematica; al contrario, è in grado di coprire uno spettro di applicazioni della massima varietà. Disegno e implementazione di Ref si sono evoluti in parallelo con lo sviluppo di uno scenario di dimostrazioni interamente formalizzato, che culminerà in una dimostrazione del teorema dell'integrale di Cauchy sulle funzioni analitiche.

Lo studio delineato in queste pagine è servito anche a predisporre una serie di definizioni e teoremi, via via incorporati nello scenario principale utilizzato per il collaudo di Ref. La maggior parte delle leggi sul rango riportate alla fine della Sez. 6, delle proprietà di chiusura delle soprastrutture riportate nella Sez. 4, ecc., sono state dimostrate con l'ausilio di Ref. Per esempio, il teorema dimostrato nella Sez. 11 compare (dopo che il suo sviluppo è stato soddisfacentemente riprodotto con Ref) nell'interfaccia della THEORY mostrata in Fig. 2. (V. [31] per una discussione del costrutto THEORY).

L'interfaccia di un'altra significativa THEORY che sfrutta la nozione di rango viene presentata nella Fig. 3. Questa teoria signedSymbols è un utilissimo preliminare ad indagini teoriche (per es. su questioni riguardanti la completezza o incompletezza di un sistema deduttivo formale) che richiedano l'aritmetizzazione di una sintassi. "Aritmetizzazione" intesa, nel nostro specializzato contesto, come la rappresentazione tramite operazioni su *insiemi* dei costrutti di un linguaggio simbolico.

[20] Per poter ottenere l'insieme descritto da X_j con una sola applicazione dell'assioma di separazione, avremmo bisogno di uno schema di formazione di insiemi piú liberale, che permettesse di produrre la descrizione $\{x \in \mathcal{P}^{(i)}(\bigcup A) \mid \{a_1\}^{(i-1)} \notin x \vee \ldots \vee \{a_j\}^{(i-1)} \notin x\}$.

Esempio. Il linguaggio di una logica proposizionale mono-modale il cui insieme di letterali asseriti abbia la cardinalità di atms, può essere modellato con gli insiemi della sovrastruttura $\mathcal{V}_\omega^A$, dove A è la famiglia $\{\mathsf{aff}_\ominus(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{atms}\}$ prodotta dalla signedSymbols applicata ad atms. (Che gli elementi di A possano fungere da urelementi, pur essendo insiemi, dovrebbe essere fatto acquisito con la Sez. 10).

In effetti, ogni elemento e di $\mathcal{V}_\omega^A \setminus A$ può venire scomposto in un "operando" $e \setminus \mathcal{V}_\omega$ e un "*opcode*" $e \cap \mathcal{V}_\omega$, pensando al primo come a una disgiunzione, al secondo come a uno dei tre costrutti di affermazione, negazione, necessitazione. In armonia con queste convenzioni, possiamo quindi specificare, tramite la seguente formula ricorsiva *globale* (cioè definita sull'intero $\boldsymbol{\mathcal{V}}$), come vadano valutati gli insiemi in una struttura alla Kripke costituita da "insieme di mondi" W, relazione R di "accessibilità fra mondi" ed interpretazione M per le lettere proposizionali (per cui dev'essere $R \subseteq W \times W$ ed $A \overset{M}{\longmapsto} \mathcal{P}(W)$):

$$\begin{aligned} m\_vl(Op,U,W,R) =_{\mathrm{Def}} \ & \mathsf{if}\ \ Op = 0\ \ \mathsf{then}\ \ U\ \ \mathsf{elseif}\ \ Op = 1\ \ \mathsf{then}\ \ W \setminus U \\ & \mathsf{else}\ \ \big\{ x \in W \mid U \supseteq R \restriction \{x\} \big\}\ \ \mathsf{fi}\,; \\ m\_eval(E,W,R,M) =_{\mathrm{Def}} \ & \mathsf{if}\ \ E \in \mathsf{domain}(M)\ \ \mathsf{then}\ \ M \restriction E\ \ \mathsf{else} \\ m\_vl\big(\, \mathsf{arb}(E \cap \mathcal{V}_\omega), & \textstyle\bigcup \{ m\_eval(y,W,R,M) : \ y \in E \setminus \mathcal{V}_\omega \}\,, W, R, M\,\big) \\ & \mathsf{fi}\,. \end{aligned} \qquad \square$$

```
THEORY globalizeTog (T)
    Svm(T) & T← =T & {p ∈ T | p[1]=p[2]}=∅
⟹  (tog⊖)
    ⟨∀x ∈ domain(T) | T↾x≠x & T↾(T↾x)=x⟩
    ⟨∀x ∈ domain(T) | tog⊖(x)=T↾x⟩
    ⟨∀x | tog⊖(x)≠x & tog⊖(tog⊖(x))=x⟩
END globalizeTog
```

Figura 2. Uno strumento per rendere globale un interruttore T

17 Costruzione della gerarchia di Ackermann

Il seguente programma SETL [35] effettua, sino ad un livello prestabilito, la costruzione della gerarchia degli insiemi ereditariamente finiti puri. Pensare che questo dominio sia ordinato alla Ackermann (vedi Sez. 7) ci permette di rappresentare ogni insieme tramite una posizione, alla quale è vantaggioso (per esempio a fini di *pretty-printing*) tenere associata una coppia di numeri naturali: la posizione del massimo di tale insieme e quella dell'insieme formato da tutti gli elementi diversi dal massimo.

```
program lexOrd;

  const M := 4; -- Rango massimo che verrà considerato da questo programma.

  var SY, -- Rappresentazione simbolica (scalare) di particolari insiemi transitivi.
      HF; -- Lista degli ereditariamente finiti, sino a un certo rango massimo.

-- Questo programma SETL genera tutti gli insiemi della gerarchia cumulativa di
```

-- This theory receives a set atms of which it will univocally convert every element x into a positive literal by the affirmation operation $\mathsf{aff}_{\ominus}(\mathsf{x})$ and into a negative literal by the negation operation $\mathsf{neg}_{\ominus}\big(\mathsf{aff}_{\ominus}(\mathsf{x})\big)$, where $\mathsf{neg}_{\ominus}$ is a Galois correspondence. For a finite set atms, positive integer encodings and their negatives would suffice, but a more general approach will be taken here, and $\mathsf{aff}_{\ominus}, \mathsf{neg}_{\ominus}$ will be defined globally. Along with the functions $\mathsf{aff}_{\ominus}, \mathsf{neg}_{\ominus}$, this theory returns a collection $\mathsf{lits}_{\ominus}$ of positive and negative literals including all the affirmed and negated images of the "symbols" in atms. Moreover, it returns a designation $\mathsf{false}_{\ominus}$ for falsehood such that the pair $\mathsf{false}_{\ominus}, \mathsf{neg}_{\ominus}(\mathsf{false}_{\ominus})$ of complementary truth values does not intersect $\mathsf{lits}_{\ominus}$. All literals, as well as the logical constants, will share the same rank exceeding the ordinal $\mathbb{N}$.

THEORY $\mathsf{signedSymbols}(\mathsf{atms})$

$\Longrightarrow (\mathsf{aff}_{\ominus}, \mathsf{neg}_{\ominus}, \mathsf{lits}_{\ominus}, \mathsf{false}_{\ominus})$

$$\big\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \mid \mathsf{x} \neq \mathsf{y} \rightarrow \mathsf{aff}_{\ominus}(\mathsf{x}) \neq \mathsf{aff}_{\ominus}(\mathsf{y}) \big\rangle$$

$$\big\langle \forall \mathsf{x} \mid \mathsf{neg}_{\ominus}\big(\mathsf{neg}_{\ominus}(\mathsf{x})\big) = \mathsf{x} \;\&\; \mathsf{neg}_{\ominus}(\mathsf{x}) \neq \mathsf{x} \big\rangle$$

$$\big\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \mid \mathsf{aff}_{\ominus}(\mathsf{x}) \neq \mathsf{neg}_{\ominus}\big(\mathsf{aff}_{\ominus}(\mathsf{y})\big) \big\rangle$$

$$\{\mathsf{aff}_{\ominus}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{atms}\} \subseteq \mathsf{lits}_{\ominus}$$

$$\{\mathsf{neg}_{\ominus}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{lits}_{\ominus}\} = \mathsf{lits}_{\ominus}$$

$$\mathsf{false}_{\ominus} \notin \mathsf{lits}_{\ominus}$$

$$\{\mathsf{rk}(\mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathsf{lits}_{\ominus}\} \subseteq \{\mathsf{rk}(\mathsf{false}_{\ominus})\}$$

$$\big\langle \forall \mathsf{n} \mid \mathsf{n} \in \mathsf{next}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathsf{n} \in \mathsf{rk}(\mathsf{false}_{\ominus}) \big\rangle$$

$$\big\langle \forall \mathsf{x} \mid \mathsf{rk}(\mathsf{x}) \notin \mathsf{rk}(\mathsf{false}_{\ominus}) \rightarrow \mathsf{rk}\big(\mathsf{neg}_{\ominus}(\mathsf{x})\big) = \mathsf{rk}(\mathsf{x}) \big\rangle$$

END $\mathsf{signedSymbols}$

Figura 3. Teoria che genera una base di letterali di assegnata cardinalità

-- von Neumann che abbiano rango non eccedente M, ordinandoli
-- lessicograficamente alla Ackermann a formare una lista HF. Entro HF,
-- ogni insieme non vuoto x viene rappresentato come coppia $[i, j]$ ove
-- j è la posizione dell'elemento massimo di x ed i è il numero
-- d'ordine dell'insieme $x - \{\max(x)\}$ risultante dalla rimozione di tale
-- massimo da x. Le posizioni si contano, entro HF, cominciando da 1; la prima di
-- loro è occupata da $1 = 0$. Per convenzione indichiamo con 0 la posizione
-- dell'insieme vuoto (coincidente con il numero naturale 0); in posizione
-- 1 troveremo dunque, a rappresentare il singoletto 0, la coppia $[0, 0]$.

-- Il primo strato abbraccia l'intervallo di posizioni comprese fra 1 ed 1.
-- Una volta completata la generazione uno strato, le posizioni dei cui
-- elementi siano comprese fra i e j (estremi inclusi), per costruire lo
-- strato successivo procederemo cosí: per ogni valore h dell'intervallo
-- $[i \dots j]$, comporremo una "lamina" formata da tutti gli elementi del nuovo
-- strato aventi l'h-esimo elemento come loro massimo.

```
HF := [[0,0]]; -- numero 1 inteso alla von Neumann, avente rango 1
SY := { }; -- tabella delle posizioni cui compete un simbolo particolare
i := 1; -- bordo inferiore dello strato generato ultimamente

for r in [2...M] loop -- ciclo che genera tutti gli insiemi di rango r
    j := # HF; -- bordo superiore dello strato generato ultimamente
    for h in [i...j] loop -- generazione della lamina formata da quegli
                          -- insiemi che hanno come proprio massimo
                          -- l'h-esimo insieme della gerarchia
        k := # HF; -- bordo inferiore della lamina in costruzione
        HF +:= [[p,h]: p in [0..k]];
    end loop;
    SY(j) := 1 - r; -- posizione dell'insieme che rappresenta
                    -- l'r − 1-esimo livello della gerarchia
    i := j + 1; -- traslazione del bordo inferiore del più recente strato
end loop;

NM := 0; -- posizione (nominale, visto che lo 0 non viene iscritto in HF)
         -- di un numero naturale inserito in gerarchia
SY(0) := 0; -- la posizione 0 è quella che compete al numero 0
r := 1; -- rango del prossimo numero naturale che verrà introdotto in SY
for h in [1...#HF] loop -- individuazione dei numerali, ...
    if HF(h)(1) = NM & HF(h)(2) = NM then
        SY(h) := r; r +:= 1; NM := h; -- ...con annotazione in SY
    end if;
end loop;
SY(#HF) ?:= -M; -- codifica di un ulteriore livello della gerarchia
oufile := open("lexOrd.txt","TEXT-OUT");
for s = SY(p) loop
    printa(oufile, s, " = ", pos2set(p,"") + "}");
end loop;
printa(oufile, -(M + 1), " = {");
for h in [0..#HF-1] loop
    printa(oufile,pos2set(h,"}") + ",");
end loop;
printa(oufile,pos2set(#HF,"}") + "}");
close(oufile);

procedure pos2set(p,b);

-- Questa procedura prepara per la stampa una rappresentazione del-
-- l'insieme sotto forma di stringa, in cui alcuni insiemi transitivi vengono
-- espressi tramite costanti numeriche (non-negative per i numeri naturali,
-- negative per esprimere i livelli).
```

```
return if b /= "," & b /= "" & SY(p) ≠ Ω then str(SY(p))
    elseif p = 0 then "{"
    elseif b /= "," & HF(p)(1) /= 0 &
          HF(HF(p)(1))(1) = 0 & HF(HF(p)(2))(1) = HF(p)(1) then
       ( + str(pos2set(HF(HF(p)(2))(2),"}")) + "," +
       str(pos2set(HF(HF(p)(1))(2),"}")) + ")"
    elseif b /= "," & SY(p) = Ω & HF(p)(1) = HF(p)(2) then
       str(pos2set(HF(p)(1),"}")) + "+"
    else pos2set(HF(p)(1), ",") +
       pos2set(HF(p)(2), "}") +
       b
    end if;

 end pos2set;

end lexOrd;
```

18 Gerarchia di Ackermann: libreria **Maple**

Riportiamo qui un'implementazione Maple [19] delle operazioni basilari sugli insiemi ereditariamente finiti puri, che rappresenta tali insiemi tramite le loro posizioni riferite all'ordinamento lessicografico di Ackermann. Le linee di massima della specifica che segue sono state tracciate nelle Sezioni 8 e 9. In qualche caso avremmo potuto fornire traduzioni piú sbrigative di queste: ma le specifiche qui proposte tendono, piuttosto che alla massima parsimonia descrittiva, ad assicurare qualche piccola economia nei tempi di calcolo.

Anche i *complementi* in $\mathcal{V}_\omega$ degli insiemi ereditariamente finiti (v. l'esempio della Sez. 13) vengono debitamente manipolati da questa libreria Maple. Nel loro caso vi saranno meno operazioni effettuabili (per dirne una, nel loro caso non ha sempre senso selezionare da un insieme infinito un elemento minimale rispetto all'inclusione; inoltre, la possibilità di formare sottoinsiemi per separazione e rimpiazzamento sarà garantita solo in circostanze particolarmente restrittive).

Questa implementazione potrà servire da piattaforma cui ricondurre, manualmente o per sintesi automatica (e, se non sempre, per lo meno nella maggioranza dei casi) le manipolazioni algoritmiche riguardanti universi computabili d'insiemi (v. Sez. 13). Fra questi, ad esempio, gli universi di iperinsiemi (v. Sez. 14).

Una volta arricchita con costrutti inerenti le mappe associative (che sono pur sempre insiemi, ma rivolti ad impieghi piú specifici), la libreria qui proposta verrebbe quasi a coincidere con il nucleo di un linguaggio di programmazione basato sugli insiemi, come ne esistono tanti. Un nucleo peraltro, il nostro, dotato di una duttilità maggiore: i suoi "insiemi" e le sue "mappe", infatti, non vanno intesi in un senso prestabilito bensí come concretamenti mutevoli di due particolarissimi tipi di dato astratto, pervasivi nella pratica della programmazione in misura pari alla rilevanza da essi acquisita nelle indagini sui fondamenti del ragionamento esatto.

Ackermann hierarchy: library of functions for finite and cofinite sets

(July 17, 2007)

Utilities

An arbitrary set

```
> any0:=proc() 0 end:
```

Complement

```
> cmp0:=proc(p::integer) -(p+1) end:
```

Head and tail of a set

```
> hd:=proc(p::posint,t::evaln) local h,x;
    x:=p;
    for h from 0 do x:=iquo(x,2); if x=0 then break fi od;
    t:=p-2^h; return h;
  end:
> tl:=proc(p::posint,h::evaln) local t; h:=hd(p,t); return t end:
> mn:=proc(p::integer) local f,m,r,x;
    if   p=0 then error "the argument p is null"
    elif p>0 then x:=p; f:=1
    else          x:=cmp0(p); f:=0
    fi;
    for m from 0 do x:=iquo(x,2,'r'); if r=f then break fi od;
    return m
  end:
```

Add element Q to set P, when Q not in P

```
> wth0:=proc(p::integer,q::integer)
    description "Rem: if q is a class, do nothing";
    if q<0 then p else p+2^q fi
  end:
```

Union of disjoint sets

```
> un0 := proc (p::integer, q::integer) if p < 0 and q < 0 then error "both args. are
  classes, which are never disjoint" end if; p+q end proc:
```

Set difference when Q included in P

```
> df0:=proc(p::integer,q::integer)
    description "Rem: if q is a class, do nothing";
    if q>=0 then p-q fi;
  end:
```

Symmetric difference and intersection

```
> synt0:=proc(pp::nonnegint,qq::nonnegint,nt::evaln) description "Basic function for
  finite sets";
    local p,q,hp,hq,tp,tq,sy,n;
    p:=pp; q:=qq;
    if   p=0 then nt:=0; sy:=q
    elif q=0 then nt:=0; sy:=p
    else sy:=0; n:=0;
         hp:=hd(p,tp);  hq:=hd(q,tq);
         do if hp<hq  then sy:=wth0(sy,hq); q:=tq;
              if q<>0 then hq:=hd(q,tq) else break fi
            elif hq<hp then sy:=wth0(sy,hp); p:=tp;
              if p<>0 then hp:=hd(p,tp) else break fi
            else n:=wth0(n,hq); p:=tp; q:=tq;
              if tp<>0 then hp:=hd(tp,tp) else break fi;
              if tq<>0 then hq:=hd(tq,tq) else break fi
            fi
         od;
         nt:=n;
         if p>q then sy:=un0(sy,p) else sy:=un0(sy,q) fi
    fi
  end:
  sy0:=proc(p::integer,q::integer,nt::evaln) local n;
```

```
if p>=0 and q>=0 then synt0(p,q,nt)
elif p>=0 and q<0 then
  synt0(p,cmp0(q),n); nt:=df0(p,n); un0(n,cmp0(un0(%%,n)))
elif p<0 and q>=0 then
  synt0(q,cmp0(p),n); nt:=df0(q,n); un0(n,cmp0(un0(%%,n)))
else synt0(cmp0(p),cmp0(q),n); nt:=cmp0(un0(%,n)); return %%
fi
end:
nt0:=proc(p::integer,q::integer,sy::evaln) local n; sy:=sy0(p,q,n); return n end:
```

Predicates

Is P null?

```
> Is_null:=proc(p::integer) p=null() end:
```

Is P a class?

```
> Is_class:=proc(p::integer) mlt(p)=null() end:
```

Is P a number?

```
> Is_num:=proc(p::integer) p=rk(p) end:
```

Is Q in P?

```
> In:=proc(q::integer,p::integer)
    if Is_class(q) then false
    else mlt(q); nt0(%,p,s)=%
    fi
  end:
```

Is P a pair?

```
> Is_pair:=proc(p::integer) p=opr(sn(p),dx(p)) end:
```

Is Q a subset of P?

```
> Is_sub:=proc(q::integer,p::integer) local s; nt0(p,q,s)=q end:
```

Is P transitive?

```
> Is_trans:=proc(p::integer) Is_sub(U(p),p) end:
```

Set constructors: basic functions

Empty set

```
> null:=proc() df0(any0(),any0()) end:
```

Class of all sets

```
> all:=proc() cmp0(null()) end:
```

Add element Q to set P

```
> wth:=proc(p::integer,q::integer)
    description "Rem: if q is a class, do nothing";
    if In(q,p) then p else wth0(p,q) fi;
  end:
```

Multleton: build the set containing elements Q1, Q2, ...Qn

```
> mlt:=proc() local p,q,qset;
    description "Rem: classes, if any, are disregarded";
    qset:={args};
    p:=null(); for q in qset do p:=wth0(p,q) od;
  end:
```

Take element Q out of set P

```
> less:=proc(p::integer,q::integer)
    if In(q,p) then df0(p,mlt(q)) else p fi
  end:
```

Special transitive sets

Next of P is: P union {P}

```
> nx:=proc(p::nonnegint)  wth0(p,p)  end:
```

Natural number

```
> num := proc(n::nonnegint)
    if n = 0 then null() else nx(num(n-1)) fi
  end:
```

Cumulative hierarchy Vn

```
> cum:=proc(n::nonnegint) local sng0;
    sng0:=proc(n::nonnegint) description "Singleton {...{0}...} with n levels of
```

```
parenthesis nesting";
    if n=0 then 0 else mlt(sng0(n-1)) fi
  end;
  sng0(n+1)-1  # arithmetics!!
end:
```

Boolean set operations

Symmetric difference

```
> sy:=proc(p::integer,q::integer) local n; sy0(p,q,n) end:
```

Intersection

```
> nt:=proc(p::integer,q::integer) local s; nt0(p,q,s) end:
```

Complement

```
> cmp:=proc(p::integer) local n; sy0(p,all(),n) end:
```

Union

```
> un:=proc(p::integer,q::integer) local n; un0(sy0(p,q,n),n) end:
```

Difference

```
> df:=proc(p::integer,q::integer) local s; df0(p,nt0(p,q,s)) end:
```

Aggregators

Union of all elements of a set

```
> U:=proc(p::integer) local t;
    if Is_null(p) then null()
    elif Is_class(p) then all()
    else un(hd(p,t),U(t)) fi
  end:
```

Power set

```
> P:=proc(p::nonnegint) local h,pt,S;
    S:=proc(r::nonnegint,q::nonnegint) local h;
      description "Add element q to all elements of set r. Restriction: q should not
  be in the elems. of r";
      if Is_null(r) then pt
         else wth0(S(tl(r,h),q), wth0(h,q)) fi
    end;
    if Is_null(p) then num(1)
    else pt:=P(tl(p,h)); S(pt,h)
    fi
  end:
```

Pairing and its conjugated projections

Ordered pair

```
> opr:=proc(p::integer,q::integer) local t;
    if Is_class(q) then mlt(null(),mlt(cmp(q)))
                   else mlt(mlt(q)) fi;
    if Is_class(p) then wth(%,wth(hd(%,t),cmp(p))); cmp(%)
                   else wth(%,wth(hd(%,t),p))
    fi;
  end:
```

Left projection of a pair (works for any set or class)

```
> sn0:=proc(pq::nonnegint) local t,h,r,x;
    description "Left projection of a set";
    if Is_sub(rk(pq),num(1)) then null()
    else h:=hd(wth(pq,null()),t); r:=hd(t,x);
         if Is_null(r) then hd(h,x)
         else less(hd(pq,x),hd(r,x)); hd(%,x)
         fi
    fi
  end:
  sn:=proc(pq::integer)
    description "Left projection of a class";
    if Is_class(pq) then cmp(sn0(cmp(pq))) else sn0(pq) fi
  end:
```

Right projection of a pair (works for any set or class)

```
> dx0:=proc(pq::nonnegint) local p,r,t;
    description "Right projection of a set";
    if Is_null(pq) then null()
    else p:=sn0(pq);  r:=less(hd(pq,t),p);
         if Is_null(r) then p else hd(r,t) fi
    fi
  end:
  dx:=proc(pq::integer) local r;
    description "Right projection of a class";
    if Is_class(pq) then r:=cmp(pq) else r:=pq fi;
    if In(null(),r) then cmp(dx0(r)) else dx0(r) fi
  end:
```

Dimensions of sets: depth, width, length

Rank as a numeral and as a number

```
> rk:=proc(p::integer) local n,q; description "Returns a numeral";
    if Is_class(p) then omega
    else q:=p; n:=null();
      while q<>null() do tl(q,q); n:=nx(n) od;
      return n
    fi
  end:
  Rk:=proc(p::integer) local i,q; description "Returns a number";
    if Is_class(p) then infinity
    else q:=p;
      for i from 0 while q<>null() do tl(q,q) od;
      return i
    fi
  end:
```

Cardinality

```
> card:=proc(p::integer) local i,q;
    if Is_class(p) then infinity
    else q:=p;
      for i from 0 while q<>null() do hd(q,q) od;
      return i;
    fi
  end:
```

Right length

```
> rlen:=proc(p::integer) local i,q;
    if Is_class(p) then infinity
    else q:=p;
      for i from 0 while q<>null() do q:=dx(q) od;
      return i
    fi
  end:
```

Left length

```
> llen:=proc(p::integer) local i,q;
    if Is_class(p) then infinity
    else q:=p;
      for i from 0 while q<>null() do q:=sn(q) od;
      return i
    fi
  end:
```

Selectors

Selection of an arbitrary element of a class not intersecting the class

```
> arb:=proc(p::integer) if Is_null(p) then null() else mn(p) fi end:
```

Choice of an element from each set in a set

```
> ch:=proc(p::nonnegint) local h,t;
    description "The highest element of each block is selected";
```

```
    if Is_null(p) or p=num(1) then null()
    else wth0(ch(tl(p,h)),hd(h,t))
    fi
  end:
```

> η := **proc**(*p*::*nonnegint*, *q*::*nonnegint*)

if $p = q$ **then** arb(p) **else** df(p, q); **if** Is_null(%) **then** arb(df(q, p)) **else** arb(%) **end if end if**

end proc

Intensionally characterized subsets (only for sets)

Negative separation à la Fraenkel

```
> spf:=proc(p::nonnegint,f::procedure,g::procedure) local h;
    if Is_null(p) then p
    else spf(tl(p,h),f,g);
         if not In(f(h),g(h)) then wth0(%,h) else % fi
    fi
  end:
```

Positive separation

```
> sppf:=proc(p::nonnegint, f::procedure, g::procedure) local q;
    spf(p, q->q, q->spf(p,q->f(q),q->g(q)))
  end:
```

Negative replacement à la Fraenkel

```
> rpf:=proc(p::nonnegint,f::procedure,g::procedure,h::procedure) local t;
    if Is_null(p) then p
    else hd(p,t);
      if In(f(%),g(%)) or In(%,rpf(t,f,g,h))
      then rpf(t,f,g,h)
      else wth0(rpf(t,f,g,h),%)
      fi
    fi
  end:
```

Positive replacement

```
> rppf:=proc(p::nonnegint,f::procedure,g::procedure,h::procedure)
    rpf(p, q->q, q->rpf(p,q->f(q),q->g(q),q->q), q->h(q));
  end:
```

Replacement à la Skolem

```
> rpl:=proc(p::nonnegint,f::procedure,h::procedure) local t;
      if Is_null(p) then p
      else hd(p,t);
        if f(%) then wth0(rpl(t,f,h),%) else rpl(t,f,h) fi
      fi
  end:
```

Displaying functions

Table of special sets [position, symbol] up to rank "r"

```
> symb:=proc(r::nonnegint)  local i;
     [seq([num(i),i],i=0..r), seq([cum(i),V||i],i=3..r)];
  end:
```

Standard set representation (Maple "set" type)

```
> p2s:=proc(p::nonnegint) local h;
    description "Recursive set construction";
    if Is_null(p) then {}
    else p2s(tl(p,h)) union {p2s(h)}
    fi
  end:
  pos2set:=proc(p::integer) local q,r,subslist;
    description "Representation with special sets";
    if Is_class(p) then q:=cmp(p) else q:=p fi;
    r:=Rk(q);
    subslist:=seq(p2s(cum(j))=V||j, j=3..r-1); # levels
    subslist:=subslist, seq({seq(j,j=0..i-2)}=i-1, i=1..r); # ordinals
    subs(subslist,p2s(q));
```

```
    if Is_class(p) then -% else % fi;
  end:
```

Standard set representation by a character string

```
> pos2string:=proc(p::integer,ty::string) local q,h,sel,str;
    description "p: position of the set
                 ty=',': the set is a tail
                 ty='' : the set is a head
                 ty='}': expand, used to display symbols";
    if Is_class(p) then q:=cmp(p) else q:=p fi;
    sel:=select(x->op(1,x)=q, symb(Rk(q))); # extract symbol from table, if present
    if ty="" and nops(sel)>0 then cat("",op(sel)[2])
    elif Is_null(q) and ty="," then ""
    elif Is_null(q) and ty="}" then "{}"
    else if ty="," then str:="" else str:="{" fi;
         str:= cat(str, pos2string(tl(q,h),","), pos2string(h,""));
         if ty="" then cat(str,"}") else cat(str,ty) fi;
    fi;
    if Is_class(p) then cat("-",%) else % fi;
  end:
```

References

1. Wilhelm Ackermann. Die Widerspruchfreiheit der allgemeinen Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 114:305-315, 1937.
2. Peter Aczel. *Non-Well-Founded Sets*, vol. 14 of *CSLI Lecture Notes*. CSLI, Stanford, CA, 1988.
3. Kenneth Jon Barwise and J. Etchemendy. *The liar: an essay on truth and circular propositions*. Oxford University Press, 1987.
4. K. J. Barwise and L. Moss. *Vicious Circles*, vol. 60 of *CSLI Lecture Notes*. CSLI, Stanford, CA, 1996.
5. Johan van Benthem. *Modal Correspondence Theory*, doctoral dissertation. Universiteit van Amsterdam, Instituut voor Logica en Grondslagenondzoek van de Exacte Wetenschappen, 148 pp., 1977.
6. J. van Benthem. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, Napoli (Indices 3) & Humanities Press, Atlantic Heights, 1985.
7. D. Cantone, A. Ferro, and E.G. Omodeo. *Computable Set Theory*, vol. no.6 Oxford Science Publications of *International Series of Monographs on Computer Science*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1989.
8. D. Cantone, A. Formisano, E.G. Omodeo, and J.T. Schwartz. Various commonly occurring decidable extensions of multi-level syllogistic. In S. Ranise and C. Tinelli, eds., *Pragmatics of Decision Procedures in Automated Reasoning 2003*, PDPAR'03 (CADE19), Miami, USA, July 29, 2003.
9. D. Cantone, E.G. Omodeo, and A. Policriti. *Set Theory for Computing: From decision procedures to declarative programming with sets*, Springer-Verlag, Monographs in Computer Science, 427 pagg., 2001.
10. D. Cantone, E.G. Omodeo, and J.T. Schwartz. *Computational logic and set theory*. Book draft (Springer-Verlag), at http://www.settheory.com/intro.html
11. D. Cantone, E.G. Omodeo, J.T. Schwartz, and P. Ursino. Notes from the logbook of a proof-checker's project. In N. Dershowitz ed., *International symposium on verification (Theory and Practice)* celebrating Zohar Manna's 1000000_2-th birthday. Springer-Verlag, LNCS 2772, pp. 182-207.2003.
12. Paul J. Cohen. *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo. Appendice di Gabriele Lolli*. Feltrinelli Editore, Milano, 1973. (Titolo dell'opera originale: *Set theory and the continuum hypothesis*, 1966.)
13. Martin Davis. *Applied nonstandard analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1977.
14. Abraham A. Fraenkel. The notion of "definite" and the independence of the axiom of choice. In van Heijenoort [18, pp. 284–289]. (La pubblicazione originale, in lingua tedesca, è del 1922).
15. A. Dovier, E.G. Omodeo, E. Pontelli, and G.-F. Rossi. A language for programming in logic with finite sets. *Journal of Logic Programming*, 28(1):1–44, 1996.
16. Andrea Formisano, Eugenio G. Omodeo, and Alberto Policriti. Three-variable statements of set-pairing. Denis Richard's anniversary issue (Patrick Cegielski ed.), *Theoretical Computer Science*, 322(1):147–173, 2004.
17. Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis. *Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A*, 24:556–557, 1938.
18. Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Source books in the history of the sciences. Harvard University Press, 3rd edition, 1977.
19. André Heck. *Introduction to Maple*. Springer-Verlag, 2003.
20. P. C. Kanellakis and S. A. Smolka. CCS expressions, finite state processes, and three problems of equivalence. In *Proc. of ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, pages 228–240, 1983.
21. A. Levy. *Basic Set Theory*. Perspectives in Mathematical Logic Springer, Berlin, 1979.
22. J.W. Lloyd. *Foundations of Logic Programming*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1987.
23. Yuri I. Manin. *A course in mathematical logic*. Springer-Verlag, New York, 1977.
24. Andrzej Mostowski. *Constructible sets with applications*. North Holland, 1969.
25. Uwe Nestmann and Björn Victor. Guest editor's introduction. *Journal of Logic and Algebraic Programming*, (Special issue on the pi-calculus, pp. 1–173), 63(1):1–2, 2005.
26. John von Neumann. Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 160, 227–241, 1929. Reprinted in [27, pp. 494–508]
27. John von Neumann. *Collected Works,* vol. I*: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics*, Pergamon Press, New York, 1961.
28. E.G. Omodeo, D. Cantone, A. Policriti, and J.T. Schwartz. A Computerized Referee. In O. Stock and M. Schaerf (Eds.): *Reasoning, Action and Interaction in AI Theories and Systems*, L.C. Aiello Festschrift, Springer-Verlag, LNAI 4155, pp. 114-136, 2006.
29. E.G. Omodeo, F. Parlamento, and A. Policriti. A derived algorithm for evaluating ε-expressions over abstract sets. *Journal of Symbolic Computation*, 15(5-6):673–704, 1993. Special issue on Automatic Programming, A.W. Biermann and W. Bibel editors.
30. E.G. Omodeo, A. Policriti. Solvable set/hyperset contexts: I. Some decision procedures for the pure, finite case. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol.48(9-10), pp.1123-1155, (special issue in honor of Jacob T. Schwartz), 1995.
31. E.G. Omodeo, J.T. Schwartz. A 'Theory' mechanism for a proof-verifier based on first-order set theory. In A. Kakas and F. Sadri (eds.), "Computational Logic: Logic Programming and beyond", Essays in honour of R. Kowalski, part II,
Springer-Verlag, LNAI 2408, pp. 214-230, 2002.

32. Robert Paige and Robert Endre Tarjan. Three partition refinement algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 16(6):973–989, 1987.
33. D. M. R. Park. Concurrency and automata on infinite sequences. In P. Deussen, editor, *Theoretical Computer Science. 5th GI-Conference*, pages 167–183. Springer-Verlag LNCS, 104, 1980.
34. Davide Sangiorgi, David Walker. *The π-calculus -A theory of mobile processes.* Cambridge University Press, 2001.
35. Jacob T. Schwartz, Robert K. B. Dewar, Ed Dubinsky, and Edmond Schonberg. *Programming with Sets: An introduction to SETL.* Texts and Monographs in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 1986.
36. Alfred Tarski. Sur les ensembles fini. *Fundamenta Mathematicae*, VI:45–95, 1924.
37. Alexandru Ioan Tomescu. A formalized proof of correctness for the Davis-Putnam algorithm. Submitted, 2007.
38. Ernst Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Riproposto, in traduzione inglese, in van Heijenoort [18], pp. 183–215. (La pubblicazione originale è del 1908).