Esercizi Analisi 3 - modulo A

Anno accademico 2017-2018

Foglio 8

1. **P** Sia $C([0,1],\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ ad $\mathbb{R}$. Usando il principio d'identità dei polinomi dimostrare che $C([0,1],\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

   Siano $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$ tali che, per ogni $x \in [0,1]$, si ha
   $$f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) = x^2.$$
   Caratterizzare $B_1(f)$ e $B_1(g)$ in $C([0,1],\mathbb{R})$, dove la distanza è quella usuale del sup, cioè per ogni coppia di funzioni f_1 e f_2 da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$
   $$d_\infty(f_1, f_2) = \sup_{x\in[0,1]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

2. **P** Per ognuna delle seguenti successioni $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0,1],\mathbb{R})$, stabilire se questa converge puntualmente ad una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. In caso affermativo determinare se la convergenza è uniforme.

   (a) $f_n(x) = \sqrt{e^x - 1/n}$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

   (b) $f_n(x) = \arctan(nx)$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{(2x)^n + 1}{2^n + n^2}$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

   (d) $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{n(x+1)}{\sqrt{n}x + 1}\right)$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

3. **P** Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $C([a,b],\mathbb{R})$. Definiamo, per ogni $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, l'usuale norma lagrangiana, e
   $$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \quad \text{e} \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}.$$
   Verificare che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono delle norme su $C([a,b],\mathbb{R})$. Chiameremo d_1 e d_2 le distanze su $C([a,b],\mathbb{R})$ indotte dalle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ rispettivamente.,

   Suggerimento: per la norma $\|\cdot\|_2$ è utile osservare che proviene da un prodotto scalare.

4. **P** Sia $L : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la seguente applicazione
   $$L(f) = \int_0^1 f, \quad \text{per ogni } f \in C([0,1],\mathbb{R}).$$
   Dimostrare che L è lineare e continua su $C([0,1],\mathbb{R})$, se $C([0,1],\mathbb{R})$ è dotato di una qualunque tra le distanze d_1, d_2 e d_∞.

Sia ora $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ e sia $L_1 : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la seguente applicazione:

$$L_1(f) = \int_0^1 fg, \quad \text{per ogni } f \in C([0,1],\mathbb{R}).$$

Dimostrare che L_1 è lineare e continua su $C([0,1],\mathbb{R})$, se $C([0,1],\mathbb{R})$ è dotato di una qualunque tra le distanze d_1, d_2 e d_∞.

Suggerimento: per la distanza d_2, è utile usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

5. **P** Sia $C([0,1],\mathbb{R})$ e sia $L : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la seguente applicazione:

$$L(f) = f(1), \quad \text{per ogni } f \in C([0,1],\mathbb{R}).$$

Dimostrare che L è una applicazione lineare. Dimostrare che L è continua su $C([0,1],\mathbb{R})$, se $C([0,1],\mathbb{R})$ è dotato della distanza d_∞.

Dimostrare che L non è continua su $C([0,1],\mathbb{R})$, se $C([0,1],\mathbb{R})$ è dotato della distanza d_1 o d_2.

Suggerimento: per $d = d_1$ o $d = d_2$, costruire una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni continue su $[0,1]$ tale che $\lim_n d(f_n, g) = 0$, dove $g = 0$ cioè g è la funzione identicamente nulla, ma $f_n(1) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Potete ad esempio prendere $f_n(x) = x^n$ per ogni $x \in [0,1]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provate anche ad utilizzare delle funzioni lineari a tratti.

6. **P**$*$ Sia

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Dimostrare che non esiste alcuna $\hat{g} \in C([0,2],\mathbb{R})$ tale che $d(\tilde{g},\hat{g}) = 0$, dove d è una qualunque tra le distanze d_1, d_2 e d_∞.

Suggerimento: l'esercizio è semplice per la distanza d_∞. Per le altre due distanze, dimostrate prima di tutto che $\hat{g} = \tilde{g}$ per ogni $x \in [0,2]\backslash\{1\}$ e poi concludete.

7. **P** Dimostrare che $C([0,2],\mathbb{R})$ non è uno spazio metrico completo se dotato della della distanza d_1 o d_2.

Suggerimento: usate la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e la funzione g dell'esercizio 5. Definite

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

e analogamente

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) = 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Dimostrate che $\lim_n d(\tilde{f}_n,\tilde{g}) = 0$ e quindi che $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C([0,2],\mathbb{R})$ rispetto alla distanza d. Se $C([0,2],\mathbb{R})$ con la distanza d fosse completo, allora esisterebbe $\hat{g} \in C([0,2],\mathbb{R})$ tale che $\lim_n d(\tilde{f}_n,\hat{g}) = 0$. Dimostrate che $d(\tilde{g},\hat{g}) = 0$ e otterrete una contraddizione usando l'esercizio 6.

8. **TF**$*$ Siano V e W due spazi vettoriali normati e sia $L : V \to W$ una applicazione lineare. Dimostrare che L è continua se e solo se L è limitata, cioè esiste una costante $C > 0$ tale che
$$\|L[v]\|_W \leq C\|v\|_V, \quad \text{per ogni } v \in V.$$
Suggerimento: osservare che una applicazione lineare è continua se e solo se lo è in 0. La parte difficile è dimostrare che un'applicazione continua è limitata: usare la definizione di continuità in 0 con $\varepsilon = 1$ e ...

9. **T** Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto. Dimostrare che se f è di classe C^1 su Ω, allora f soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

10. **T**$*$ Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, Ω aperto. Sia $(t_0, x^0) \in \Omega$ e sia $\delta > 0$. Supponiamo che $x : (t_0 - \delta, t_0) \to \mathbb{R}^n$ risolva l'equazione differenziale ordinaria
$$x' = f(t, x)$$
in $(t_0 - \delta, t_0)$ e che $\lim_{t \to t_0^-} x(t) = x^0$. Sia $\tilde{x} : (t_0 - \delta, t_0] \to \mathbb{R}^n$ così definita
$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t_0 - \delta < t < t_0 \\ x^0 & \text{se } t = t_0. \end{cases}$$
Dimostrare che $\tilde{x}$ risolve l'equazione $x' = f(t, x)$ in $(t_0 - \delta, t_0]$.
Suggerimento: usate, componente per componente, il Teorema di Lagrange, o de L'Hôpital, e l'equazione per dimostrare che esiste la derivata sinistra di $\tilde{x}$ in t_0, $\tilde{x}'_-(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_0)}{t - t_0}$, e verificate che $\tilde{x}'_-(t_0) = f(t_0, x^0)$.

11. **T** Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, Ω aperto. Sia $(t_0, x^0) \in \Omega$ e sia $\delta > 0$. Supponiamo che $x_1 : (t_0 - \delta, t_0] \to \mathbb{R}^n$ e $x_2 : [t_0, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ siano due funzioni continue tali che $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x^0$. Supponiamo che x_1 e x_2 risolvano l'equazione differenziale ordinaria
$$x' = f(t, x)$$
rispettivamente in $(t_0 - \delta, t_0]$ e in $[t_0, t_0 + \delta)$.
Sia $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ così definita
$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{se } t_0 - \delta < t \leq t_0 \\ x_2(t) & \text{se } t_0 \leq t < t_0 + \delta. \end{cases}$$
Dimostrare che x è una soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0. \end{cases}$$

12. **T**$*$ Dimostrare che nell'esercizio precedente vale la tesi anche se x_1 e x_2 risolvono $x' = f(t, x)$ solo in $(t_0 - \delta, t_0)$ e in $(t_0, t_0 + \delta)$, rispettivamente.
Suggerimento: usare l'esercizio 10

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile