Esercizi Analisi 3 - modulo A

Anno accademico 2017-2018

Foglio 6

1. **P** Determinare la retta tangente alla curva $(1+x)y\cos(y)+x^2+e^x=1$ nel punto $(0,0)$ passante per il punto $(0,0)$.

2. **P** Determinare la retta tangente alla curva $x\arctan(x)y-(\pi/4)e^{y-1}=0$ nel punto $(1,1)$ passante per il punto $(1,1)$.

3. **P** Determinare il piano tangente alla superficie $x^2+y^2-z^2=9$ nel punto $(0,5,4)$ passante per il punto $(0,5,4)$.

4. **P** Determinare il piano tangente alla superficie $y^3-xe^{zy}+z^2y^2+e^x+z=5$ nel punto $(0,0,4)$ passante per il punto $(0,0,4)$.

5. **P** Determinare il piano tangente all'insieme di livello 2 della seguente funzione $F(x,y,z)=x^3-xy^2+e^{zx}+\cos(y-1)$ nel punto $(0,1,3)$ passante per il punto $(0,1,3)$ e nel punto $(1,1,0)$ passante per il punto $(1,1,0)$.

6. **P**$*$ Sia $f: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile in ogni punto di A, A aperto. Sia $F: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ e sia $C=\{x\in A:\ F(x)=0\}$. Supponiamo che $F(x,y,z)=x^2-y^2-z$ e che il punto $P_0=(2,1,3)$ appartenga ad A e quindi anche a C. Sapendo che $f(P_0)=\min_C f$ e che $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)=2$, calcolare $\nabla f(P_0)$.

7. **PF**$*$ Sia $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 per cui valga $F(0)=0$ e
$$JF(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$
Supponiamo che un punto materiale percorra la curva di livello $\{F=0\}$ con velocità scalare costante pari a $2m/s$ e che al tempo $t=0$ si trovi nell'origine $0\in\mathbb{R}^3$. Sappiamo inoltre che esiste un $\delta>0$ per cui per ogni t, $0<t<\delta$, la coordinata x della posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t è positiva. Sia $f(x,y,z)=x+2y-z$. Sia $s(t)$ il valore della funzione f nella posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t. Calcolare $s'(0)$.

8. **T** Dimostrare il Teorema di inversione locale per $N=1$.

9. **TF**$*$ Dimostrare il Teorema delle funzioni implicite nella sua versione generale come corollario del Teorema di inversione locale.

   Suggerimento: applicate il Teorema di inversione locale alla funzione $\tilde{F}:\mathbb{R}^{(N-M)+M}\to\mathbb{R}^{(N-M)+M}$ così definita
$$\tilde{F}(x,y)=(x,F(x,y))\quad\text{per ogni }(x,y)\in\mathbb{R}^{N-M}\times\mathbb{R}^M.$$

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile