Esercizi Analisi 3 - modulo A

Anno accademico 2017-2018

Foglio 3

1. **P** Calcolare la matrice Jacobiana della funzione composta $g \circ f$ dove le funzioni g e f sono date da:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove
   $$f(x, y) = (2xy, x^2 + y, \sin(y)) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = (e^{x+y}, z^2 x)$$
   Suggerimento: considerare
   $$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = (2xy, x^2 + y, \sin(y))$$
   e g data da $g(u, v, w) = (e^{u+v}, w^2 u)$

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove
   $$f(x, y) = (x + y, x - y, xy, 2) \quad \text{e}$$
   $$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\cos(x_1^2 x_3), x_4^5 x_2, \sin(x_2 x_3))$$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove
   $$f(t) = (t^3, t^2, t) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = x^2 + y^4 + \cos(xyz)$$

   (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dove
   $$f(x, y, z) = x^2 + y^4 + \cos(xyz) \quad \text{e} \quad g(t) = (t^3, t^2, t)$$

2. **P** Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove
   $$f(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos^2(t)) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = xy + z^2.$$
   Calcolare
   $$\frac{d}{dt}(g \circ f)(t)$$

3. **P** Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dove $f(x, y) = (x^2 y, xy, 2y^2)$ e
   $$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z), g_4(x, y, z)) =$$
   $$(3x^2 y, z^3 + \sin(xy), z^4, x^8 + y^9).$$
   Calcolare
   $$\frac{\partial}{\partial y}(g_2 \circ f)(x, y)$$

4. **P** Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x, y, z) = (x^2, z^2 y, y^2 x)$ e
   $$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (e^{xz} y, y^2).$$
   Calcolare
   $$\frac{\partial}{\partial z}(g_1 \circ f)(x, y, z)$$

5. **P∗** Sia dato un fluido contenuto in una regione Ω, Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che il vettore velocità $v = (v_1, v_2, v_3)$ con cui si muove il fluido dipenda dalla temperatura T e dalla densità σ tramite la legge $v = F(T, \sigma)$ dove $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ è una funzione differenziabile. Supponiamo che la temperatura T e la densità σ varino con la posizione $x \in \Omega$ in maniera differenziabile e che in un punto $x^0 \in \Omega$ la temperatura, $T(x^0)$, sia pari a 30 e la densità, $\sigma(x^0)$, sia pari a 10. Supponiamo che $v(30, 10) = (1, 0, -1)$ e che

$$\frac{\partial v}{\partial T}(30,10) = \frac{\partial F}{\partial T}(30,10) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial \sigma}(30,10) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(30,10) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla T(x^0) = [5\ 4\ 1] \quad \text{e} \quad \nabla \sigma(x^0) = [1\ 4\ -1].$$

Sia $\|v\|^2 : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione tale che $\|v\|^2(x) = \|v(x)\|^2$ per ogni $x \in \Omega$. Calcolare $\nabla(\|v\|^2)(x^0)$.

6. **P∗** Sia dato un fluido contenuto in una regione Ω, Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che il vettore velocità $v = (v_1, v_2, v_3)$ con cui si muove il fluido dipenda dalla temperatura T, dalla densità σ e anche esplicitamente dalla posizione tramite la legge $v = F(T, \sigma, x, y, z)$ dove $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ è una funzione differenziabile. Supponiamo che la temperatura T e la densità σ varino con la posizione $x \in \Omega$ in maniera differenziabile e che in un punto $x^0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ la temperatura, $T(x^0)$, sia pari a 30 e la densità, $\sigma(x^0)$, sia pari a 10. Supponiamo che $v(30, 10, x^0) = (1, 0, -1)$ e che

$$\frac{\partial v}{\partial T}(30,10,x^0) = \frac{\partial F}{\partial T}(30,10,x^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}(30,10,x^0) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(30,10,x^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix}(30,10,x^0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla T(x^0) = [5\ 4\ 1] \quad \text{e} \quad \nabla \sigma(x^0) = [1\ 4\ -1].$$

Per ogni $t \in (-r, r)$, sia $f(t) = \|v\|^2(x^0 + tw) = \|v(x^0 + tw)\|^2$ dove $w = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $f'(0)$.

7. **T** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dove A è un aperto connesso. Supponiamo che f sia differenziabile in ogni punto di A. Caratterizzare le funzioni f di questo tipo il cui differenziale sia costante, cioè tali che esista $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ per cui

$$Df(x) = L \quad \text{per ogni } x \in A.$$

8. **T** Siano X e Y due spazi metrici. Dimostrare che una funzione $f : X \to Y$ Lipschitziana è continua. Ricordiamo che f è Lipschitziana se esiste $C > 0$ tale che

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X.$$

9. **T** Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di I. Dimostrare allora che f è Lipschitziana su I se e solo se $f' : I \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata.

10. **T** Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $N, M \geq 1$, Lipschitziana. Dimostrare che esistono costanti A_1 e A_2, $A_1, A_2 \geq 0$, tali che

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^M} \leq A_1 + A_2 \|x\|_{\mathbb{R}^N} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

11. **T** Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. Dimostrare che L è Lipschitziana su $\mathbb{R}^N$, cioè che esiste $C > 0$ tale che

$$\|L[x] - L[y]\|_{\mathbb{R}^M} \leq C \|x - y\|_{\mathbb{R}^N} \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrare in particolare che si può scegliere, se A è la matrice associata a L e, per $i = 1, \dots, M$, a_i sono i suoi vettori riga,

$$C = r(A) = \sqrt{M} \max_{i=1,\dots,M} \|a_i\|_{\mathbb{R}^N}.$$

Suggerimento: per linearità è sufficiente considerare il caso in cui $y = 0$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\|Ax\| \leq \sqrt{M} \|Ax\|_\infty = \sqrt{M} \max_{i=1,\dots,M} |\langle a_i, x\rangle|$$

da cui si può facilmente concludere.

12. **T**$*$ Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una funzione differenziabile in A, A aperto. Siano x^0 e x^1 tali che $[x^0, x^1]$, il segmento di vertici x^0 e x^1, sia contenuto in A. Dimostrare che

$$\|f(x^1) - f(x^0)\| \leq \left(\sup_{x \in [x^0, x^1]} r(Jf(x)) \right) \|x^1 - x^0\|$$

dove $r(A)$, per A matrice $M \times N$, è definito nell'esercizio precedente.

Suggerimento: risolvere prima l'esercizio con $M = 1$ usando il Teorema del Valor Medio (con $x^0 \neq x^1$). Infatti, per $M = 1$ si ha $r(Jf(x)) = \|\nabla f(x)\|$. E vale, per qualche $\tilde{x} \in [x_0, x_1]$,

$$|f(x^1) - f(x^0)| = \left| \frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}) \right| \|x^1 - x^0\|,$$

dove $v = (x^1 - x^0)/\|x^1 - x^0\|$. Osservando che $\|v\| = 1$ e che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}) \right| = |\langle \nabla f(\tilde{x}), v\rangle|$$

si può concludere.

Se $M > 1$, trovare $y \in \mathbb{R}^M$ con $\|y\| = 1$ tale che

$$\langle y, f(x^1) - f(x^0) \rangle = \|f(x^1) - f(x^0)\|$$

e studiare $g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dove $g(x) = \langle y, f(x) \rangle$ per ogni $x \in A$. Notare che per ogni $v \in \mathbb{R}^N$ si ha $\langle \nabla g(x), v \rangle = \langle y, Jf(x)v \rangle$ e quindi, usando l'esercizio precedente e $\|y\| = 1$,

$$|\langle \nabla g(x), v \rangle| = |\langle y, Jf(x)v \rangle| \leq \|y\| \|Jf(x)v\| \leq r(Jf(x))\|v\|.$$

13. **T**$*$ Sia $C \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, C aperto convesso. Sia $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $M \geq 1$, differenziabile in C. Dimostrare che f è Lipschitziana se e solo se esiste una costante C_1 tale che $r(Jf(x)) \leq C_1$ per ogni $x \in C$, dove $r(A)$, per A matrice $M \times N$, è definito nell'esercizio 11. Ricordiamo che un insieme $C \subset \mathbb{R}^N$ è *convesso* se per ogni $x, y \in C$ il segmento di estremi x e y, $[x, y]$, è contenuto in C.

14. **T**$*$ Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una funzione di classe C^1 in A, A aperto. Dimostrare che f è localmente Lipschitziana in A, cioè per ogni $x^0 \in A$ esistono costanti positive r_0 e L tali che $B_{r_0}(x^0) \subset A$ e vale

$$\|f(x^1) - f(x^2)\| \leq L\|x^1 - x^2\| \quad \text{per ogni } x^1, x^2 \in B_{r_0}(x^0).$$

Suggerimento: dimostrare che la funzione $r(Jf)$ è localmente limitata, cioè per ogni $x^0 \in A$ esistono costanti positive r_0 e C_1 tali che $B_{r_0}(x^0) \subset A$ e vale $r(Jf(x)) \leq C_1$ per ogni $x \in B_{r_0}(x^0)$ e applicare quindi l'esercizio precedente al convesso $C = B_{r_0}(x^0)$.

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile