Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2016-2017

Foglio 5

1. **T** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ limitata e sia $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la sua estensione a zero, cioè
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$
Siano Q_1 e Q_2 due pluriintervalli tali che $\Omega \subset Q_i$ per $i = 1, 2$.
Dimostrare che $\tilde{f}$ è Riemann integrabile su Q_1 se e solo se lo è su Q_2 e in questo caso vale
$$\int_{Q_1} \tilde{f} = \int_{Q_2} \tilde{f}.$$
Suggerimento: considerare prima il caso in cui $Q_1 \subset Q_2$. Nel caso generale utilizzare $Q = Q_1 \cap Q_2$.

2. **T** Siano E_1 ed E_2 due sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che se $E_1 \subset E_2$ allora $m(E_1) \leq m(E_2)$ (monotonia della misura).
Ricordiamo che per ogni $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile con $m(E)$ intendiamo la misura di E, cioè $|E|$.

3. **T** Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, A aperto non vuoto misurabile. Dimostrare che $m(A) > 0$.

4. **T** Siano E_1 e E_2 due sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che $E_1 \cup E_2$ e $E_1 \cap E_2$ sono misurabili e che vale
$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

5. **T** Siano $E_1, \ldots, E_n$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ è misurabile e che vale la subadditività finita della misura cioè
$$m(E) \leq \sum_{i=1}^n m(E_i).$$
Dimostrare che se i sottoinsiemi $E_1, \ldots, E_n$ sono inoltre a due a due disgiunti, cioè $E_i \cap E_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, allora vale l'additività finita della misura cioè
$$m(E) = \sum_{i=1}^n m(E_i).$$

6. **T** Sia $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Sia $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$. Costruire un esempio in cui E_i è misurabile per ogni $i \in \mathbb{N}$ mentre E non è misurabile (secondo Peano-Jordan).

7. **T** Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile, tale che $m(E) = 0$. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste $c \in \mathbb{R} \backslash E$ tale che $a < c < b$. Concludere quindi che $\overline{\mathbb{R} \backslash E} = \mathbb{R}$.

8. **T** Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$ tale che $E \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \{a\} \subset \mathbb{R}^N$. Dimostrare che E ha misura (N-dimensionale) nulla.

9. **T** Sie $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile, tale che $m(E) = 0$. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata. Dimostrare che f è integrabile su E e che $\int_E f = 0$.

10. **T** Per ogni $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ definiamo

$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1).$$

Dimostrare che se E_1 e E_2 sono misurabili, allora $E_1 \Delta E_2$ è misurabile.

Sia Q un pluriintervallo di $\mathbb{R}^N$. Per ogni $E_1, E_2 \subset Q$, misurabili, diciamo che $E_1 \sim E_2$ se e solo se $m(E_1 \Delta E_2) = 0$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\{E_1 \subset Q : \ E_1 \text{ misurabile}\}$.

Sia $X = \{[E_1]_\sim : \ E_1 \subset Q, \ E_1 \text{ misurabile}\}$. Per ogni $E_1, E_2 \subset Q$, misurabili, definiamo

$$d([E_1]_\sim, [E_2]_\sim) = m(E_1 \Delta E_2).$$

Dimostrare che d è una distanza su X.

11. **T** Sia Q un pluriintervallo di $\mathbb{R}^N$. Siano $f, g : Q \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ limitate. Diremo che $f = g$ quasi ovunque se $\{f \neq g\}$ ha misura nulla.

Dimostrare che se $f = g$ quasi ovunque allora f è integrabile se e solo se g è integrabile e in tal caso vale

$$\int_Q f = \int_Q g.$$

Siano $f, g \in \mathcal{R}(Q) = \{h : Q \to \mathbb{R} : \ h \text{ limitata e integrabile}\}$. Diremo che $f \sim g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque.

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{R}(Q)$

12. **P** Calcolare

(a) $\displaystyle\iint_Q xy \log(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [1, 2] \times [2, 3]$

(b) $\displaystyle\iint_Q \frac{xy}{x + y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [1, 2] \times [2, 3]$

(c) $\displaystyle\iint_Q xye^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [0, 2] \times [0, 1]$

(d) $\displaystyle\iint_Q x \sin(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [-1, 1] \times [0, 1]$

(e) $\displaystyle\iint_Q (x + y) \log(1 + x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

(f) $\displaystyle\iint_Q x\sqrt{1 - y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [1, 2] \times [0, 1/2]$

(g) $\displaystyle\iint_Q (x + y)e^{2xy+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [1, 2] \times [0, 1]$

(h) $\displaystyle\iint_Q \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$

(i) $\displaystyle\iint_Q \sqrt{4x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q = [2,3] \times [1,2]$

13. **P** Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ il quarto del disco di raggio 1 centrato nell'origine contenuto nel primo quadrante. Calcolare

$$\iint_E \log(1+x^2)y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{e} \quad \iint_E y \arcsin(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

14. **P** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+2y} & \text{se } (x,y) \in [-1,1] \times [0,2],\ 0 \le y \le 1-x^2 \\ 1 & \text{se } (x,y) \in [-1,1] \times [0,2],\ y > 1-x^2 \end{cases}$$

Stabilire se f è integrabile su $[-1,1] \times [0,2]$ e in tal caso calcolare

$$\iint_{[-1,1]\times[0,2]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

15. **P** Calcolare l'area di

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \text{ e } y \ge 1\}.$$

Legenda
T esercizio teorico
P esercizio pratico
F esercizio facoltativo
$*$ esercizio difficile