Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2016-2017

Foglio 4

1. **P** Per ognuna delle seguenti funzioni f, si determinino i loro punti stazionari e si stabilisca, se possibile, se questi sono minimi locali, massimi locali o punti di sella.

   (a) $f(x, y) = x^3 - 3x - y^2$

   (b) $f(x, y) = e^{x^2 y - y^2 - y}$

   (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2yz + x^2 y$

   Suggerimento: per tutti i punti critici, $\lambda = 2$ è un autovalore della matrice Hessiana

2. **PF** Per ognuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, determinare, se esiste,

   $$\min_{\mathbb{R}^N} f.$$

   (a) $f(x, y) = x^4 + 3x^2 + 2y^2 + xy - 4$

   (b) $f(x, y) = 2x^2 + |x^2 - 2x - 1| + y^2$

   (c) $f(x, y, z) = \log(1 + x^2 - x + y^2 + z^2)$

3. **P** Determinare la retta tangente alla curva $(1 + x)y\cos(y) + x^2 + e^x = 1$ nel punto $(0, 0)$ passante per il punto $(0, 0)$.

4. **P** Determinare la retta tangente alla curva $x \arctan(x)y - (\pi/4)e^{y-1} = 0$ nel punto $(1, 1)$ passante per il punto $(1, 1)$.

5. **P** Determinare il piano tangente alla superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 9$ nel punto $(0, 5, 4)$ passante per il punto $(0, 5, 4)$.

6. **P** Determinare il piano tangente alla superficie $y^3 - xe^{zy} + z^2 y^2 + e^x + z = 5$ nel punto $(0, 0, 4)$ passante per il punto $(0, 0, 4)$.

7. **P** Determinare il piano tangente all'insieme di livello 2 della seguente funzione $F(x, y, z) = x^3 - xy^2 + e^{zx} + \cos(y - 1)$ nel punto $(0, 1, 3)$ passante per il punto $(0, 1, 3)$ e nel punto $(1, 1, 0)$ passante per il punto $(1, 1, 0)$.

8. **P** Per ognuna delle seguenti funzioni $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, determinare, se esiste,

   $$\min_{C} f$$

   dove

   (a) $f(x, y) = e^{xy} + xy$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

   (b) $f(x, y) = y^2 - \sqrt{6}x^2$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1, 1], \ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^4\}$ oppure $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1, 0], \ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^4\}$

(c) $f(x,y,z) = 2y^3 - 3y^2 + x^2 - z^2$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 9\}$

9. **P** Risolvere i seguenti problemi di minimo vincolato. Determinare, se esiste,
$$\min_C f$$
dove

   (a) $f(x,y) = |y| - |x|$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 2y = 0\}$

   (b) $f(x,y) = -x^2 - x - y^2$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y + 2yx = 1, \ x \in [-2,-1] \cup [0,1]\}$

   (c) $f(x,y,z) = x - 2y - 2z^2$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}$

   (d) $f(x,y,z) = x + y^2 - z^2$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } y - 2z = 0\}$

10. **P$\ast$** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in ogni punto di A, A aperto. Sia $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e sia $C = \{x \in A : \ F(x) = 0\}$. Supponiamo che $F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$ e che il punto $P_0 = (2,1,3)$ appartenga ad A e quindi anche a C. Sapendo che $f(P_0) = \min_C f$ e che $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 2$, calcolare $\nabla f(P_0)$.

11. **PF$\ast$** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 per cui valga $F(0) = 0$ e
$$JF(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Supponiamo che un punto materiale percorra la curva di livello $\{F = 0\}$ con velocità scalare costante pari a $2m/s$ e che al tempo $t = 0$ si trovi nell'origine $0 \in \mathbb{R}^3$. Sappiamo inoltre che esiste un $\delta > 0$ per cui per ogni t, $0 < t < \delta$, la coordinata x della posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t è positiva. Sia $f(x,y,z) = x + 2y - z$. Sia $s(t)$ il valore della funzione f nella posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t. Calcolare $s'(0)$.

Legenda
T esercizio teorico
P esercizio pratico
F esercizio facoltativo
$\ast$ esercizio difficile