Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2016-2017

Foglio 2

1. **T** Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, due funzioni a valori reali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Siano $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Stabilire se $\lambda f + \mu g$ è differenziabile in x^0 e in caso affermativo calcolarne il differenziale.

2. **T∗** Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, due funzioni a valori reali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Stabilire se fg è differenziabile in x^0 e in caso affermativo calcolarne il differenziale.

3. **T** Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, A aperto, due funzioni a valori vettoriali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^M$. Dimostrare che $h : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da
$$h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=1}^{M} f_i(x) g_i(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$
è differenziabile in x^0. Dimostrare infine che
$$\nabla h(x^0) = \sum_{i=1}^{M} \left(f_i(x^0) \nabla g_i(x^0) + g_i(x^0) \nabla f_i(x^0) \right).$$

4. **T∗** Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di una variabile reale. Sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$h(x, y) = f(x) g(y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Supponiamo che $f(0)$ e $g(0)$ siano diversi da zero. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su f e g affinché h sia differenziabile in $(0, 0)$, e calcolare in tal caso il differenziale.

5. **P** Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni

   (a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan^2(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2 y} - 1}{(x^2 + y^2)^{1/4}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 - y^3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (d) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + xy)}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \in B_1((0, 0)),\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6. **P** Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili sul loro dominio e in caso affermativo determinarne la matrice Jacobiana in ogni punto del dominio

   (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dove $f(x, y) = (x^2/y, 2\cos(x + y), \dfrac{\arctan(x^3)}{x - y})$
   (b) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ dove $f(x) = (x + 1, 3\sin(x), e^{2x}, 1 - x, \log(x + 1)$
   (c) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x, y, z) = (z^2xy - z/y, \log(1 + x + y^2))$
   (d) $f : A \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dove $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - \sin(x_3^2x_4)$

7. **P** Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili sul loro dominio e in caso affermativo calcolarne il gradiente e l'approssimante lineare in ogni punto del dominio

   (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x, y) = \cos(\arctan(x - y))$
   (b) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x, y) = x^4 + 3y\log(1 + x)$
   (c) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x, y) = xy - \dfrac{x + y}{x + 4y}$
   (d) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove $f(x, y, z) = \dfrac{z(e^{x+y})}{x + y^2}$

8. **P** Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, passante per il punto P_0, dove f e P_0 sono dati da:

   (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x, y) = x^4 + 3y\log(1 + x)$ e $P_0 = (0, 1, 0)$
   (b) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x, y) = xy - \dfrac{x + y}{x + 4y}$ e $P_0 = (1, 2, 5/3)$

9. **TF**$*$ Dimostrare il Teorema del Differenziale Totale nel caso in cui $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $N > 2$.

   Suggerimento: l'esercizio non è facile, procedere per induzione sul numero di variabili N, utilizzando il caso $N = 2$ come base d'induzione.

Legenda
T esercizio teorico
P esercizio pratico
F esercizio facoltativo
$*$ esercizio difficile