

Esercizi Analisi Matematica II  
Anno accademico 2015-2016

Foglio 2

1. **T** Siano  $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto, due funzioni a valori reali. Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano differenziabili in  $x^0 \in A$ . Siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Stabilire se  $\lambda f + \mu g$  è differenziabile in  $x^0$  e in caso affermativo calcolarne il differenziale.
2. **T\*** Siano  $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto, due funzioni a valori reali. Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano differenziabili in  $x^0 \in A$ . Stabilire se  $fg$  è differenziabile in  $x^0$  e in caso affermativo calcolarne il differenziale.
3. **T** Siano  $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $A$  aperto, due funzioni a valori vettoriali. Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano differenziabili in  $x^0 \in A$ . Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'usuale prodotto scalare su  $\mathbb{R}^M$ . Dimostrare che  $h : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=1}^M f_i(x)g_i(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$

è differenziabile in  $x^0$ . Dimostrare infine che

$$\nabla h(x^0) = \sum_{i=1}^M (f_i(x^0)\nabla g_i(x^0) + g_i(x^0)\nabla f_i(x^0)).$$

4. **T\*** Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di una variabile reale. Sia  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione data da

$$h(x, y) = f(x)g(y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Supponiamo che  $f(0)$  e  $g(0)$  siano diversi da zero. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su  $f$  e  $g$  affinché  $h$  sia differenziabile in  $(0, 0)$ , e calcolare in tal caso il differenziale.

5. **P** Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\arctan^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{e^{x^2y} - 1}{(x^2+y^2)^{1/4}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^3 - y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\log(1+xy)}{|x|+|y|} & \text{se } (x, y) \in B_1((0,0)), (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

6. **P** Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili sul loro dominio e in caso affermativo determinarne la matrice Jacobiana in ogni punto del dominio

(a)  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dove  $f(x, y) = (x^2/y, 2 \cos(x + y), \frac{\arctan(x^3)}{x - y})$

(b)  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5$  dove  $f(x) = (x + 1, 3 \sin(x), e^{2x}, 1 - x, \log(x + 1))$

(c)  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dove  $f(x, y, z) = (z^2xy - z/y, \log(1 + x + y^2))$

(d)  $f : A \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - \sin(x_3^2x_4)$

7. **P** Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili sul loro dominio e in caso affermativo calcolarne il gradiente e l'approssimante lineare in ogni punto del dominio

(a)  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f(x, y) = \cos(\arctan(x - y))$

(b)  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f(x, y) = x^4 + 3y \log(1 + x)$

(c)  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f(x, y) = xy - \frac{x + y}{x + 4y}$

(d)  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f(x, y, z) = \frac{z(e^{x+y})}{x + y^2}$

8. **P** Scrivere l'equazione e l'equazione parametrica del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , passante per il punto  $P_0$ , dove  $f$  e  $P_0$  sono dati da:

(a)  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f(x, y) = x^4 + 3y \log(1 + x)$  e  $P_0 = (0, 1, 0)$

(b)  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $f(x, y) = xy - \frac{x + y}{x + 4y}$  e  $P_0 = (1, 2, 5/3)$

9. **TF\*** Dimostrare il Teorema del Differenziale Totale nel caso in cui  $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  con  $N > 2$ .

Suggerimento: l'esercizio non è facile, procedere per induzione sul numero di variabili  $N$ , utilizzando il caso  $N = 2$  come base d'induzione.

### Legenda

**T** esercizio teorico

**P** esercizio pratico

**F** esercizio facoltativo

\* esercizio difficile