Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2015-2016

Foglio 1

1. **P** Su $\mathbb{R}^N$ definiamo le seguenti norme: per ogni $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2}; \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}.$$

   Dimostrare che queste sono norme. Per $N = 2$, disegnare la palla centrata in 0 e di raggio 1 rispetto a ciascuna delle distanze indotte da queste norme.

2. **P** Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su uno spazio vettoriale X. Diremo che le due norme sono topologicamente equivalenti se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2 \quad \text{per ogni } x \in X.$$

   Dimostrare che le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{R}^N$ sono a due a due topologicamente equivalenti.

   Suggerimento: studiare prima l'equivalenze tra le norme 1 e 2 e quella ∞, e da queste dedurre quella tra le norme 1 e 2.

3. **P** Sia $X = [0,1]$ e sia $C_b([0,1], \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue e limitate da X ad $\mathbb{R}$. Usando il principio d'identità dei polinomi dimostrare che $C_b([0,1], \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

   Siano $f, g \in C_b([0,1], \mathbb{R})$ tali che, per ogni $x \in [0,1]$, si ha

$$f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) = x^2.$$

   Caratterizzare $B_1(f)$ e $B_1(g)$ in $C_b([0,1], \mathbb{R})$, dove la distanza è quella usuale del sup.

4. **T** Dimostrare che per ogni $L \in (\mathbb{R}^N)^*$ esiste uno e un unico $y \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$L[x] = \langle y, x\rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N$$

   dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^N$.

   Dimostrare infine che $\|L\| = \|y\|$ dove $\|L\| = \sup_{\|x\|=1} |L[x]|$ e $\|y\|$ è l'usuale norma euclidea.

5. **T** Sia $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una applicazione lineare. La sua norma è data da

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|L[x]\|.$$

   Dimostrare che l'estremo superiore viene raggiunto, cioè

$$\|L\| = \max_{\|x\|=1} \|L[x]\|.$$

6. **P** Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Calcolare $\|L\|$ quando L è data da

   (a) $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

   (b) $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

   (c) $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

   Suggerimento: $\{\|x\| = 1\} = \partial B_1(0)$ che, per la distanza euclidea, coincide con la circonferenza unitaria e questa si può descrivere

$$\partial B_1(0) = \{(\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

7. **P** Determinare l'equazione (o sistema di equazioni) e una base del sottospazio $S^\perp$ dove

   (a) $v_1 = (2, -3)$ e $S = \operatorname{span}\{v_1\} \subset \mathbb{R}^2$;

   (b) $v_1 = (-2, 0, 1)$ e $S = \operatorname{span}\{v_1\} \subset \mathbb{R}^3$;

   (c) $v_1 = (-1, 4, 6)$, $v_2 = (2, 5, -2)$ e $S = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$;

   (d) $v_1 = (-1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 3, -1, 3)$, $v_3 = (-2, 1, 1, -1)$ e

$$S = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

8. **T** Sia A una matrice reale $N \times N$ e $c \in \mathbb{R}^N$ un vettore colonna. Sia c^T il vettore trasposto di c. Sia

$$A = \begin{bmatrix} \\ a_1 & \cdots & a_N \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & b_1 & \\ & \vdots & \\ & b_N & \end{bmatrix}$$

   dove $a_1, \ldots, a_N$ sono le colonne di A e $b_1, \ldots, b_N$ sono le righe di A. Calcolare $c^T \cdot A$ e $A \cdot c$, dove $\cdot$ denota il prodotto righe per colonne.

9. **T** Sia $A \in \mathcal{M}^{N\times N}(\mathbb{R})$ una matrice $N \times N$ a valori reali e sia A^T la matrice trasposta di A. Dimostrare che per ogni v, $w \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^T w\rangle.$$

10. **T** Siano X e Y due spazi metrici. Dimostrare che una funzione $f : X \to Y$ Lipschitziana è continua.

11. **T** Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di I. Dimostrare allora che f è Lipschitziana su I se e solo se $f' : I \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata.

12. **T** Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $N, M \geq 1$, Lipschitziana. Dimostrare che esistono costanti A_1 e A_2, $A_1, A_2 \geq 0$, tali che

$$\|f(x)\| \leq A_1 + A_2\|x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

13. **P** Determinare in quali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sono continue le seguenti funzioni

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|^3+|y|^3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(d) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Legenda
T esercizio teorico
P esercizio pratico
F esercizio facoltativo
$*$ esercizio difficile