Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2014-2015

Foglio 8

1. **T** Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto. Dimostrare che se f è di classe C^1 su Ω, allora f soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

2. **T** Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, Ω aperto. Sia $(t_0, x^0) \in \Omega$ e sia $\delta > 0$. Supponiamo che $x_1 : [t_0 - \delta, t_0] \to \mathbb{R}^n$ e $x_2 : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ siano due soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria

$$x' = f(t, x)$$

tali che $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x^0$. Sia $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ così definita

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{se } t_0 - \delta \leq t \leq t_0 \\ x_2(t) & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta \end{cases}$$

Dimostrare che x è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

3. **T** Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, Ω aperto. Supponiamo che f sia localmente Lipschitziana nella seconda variabile. Sia $(t_0, x^0) \in \Omega$ e sia $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, $-\infty \leq \alpha < t_0 < \beta \leq +\infty$, la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

Supponiamo che $\beta \in \mathbb{R}$ e che esista il limite $\lim_{t \to \beta^-} x(t) = \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste $\lim_{t \to \beta^-} (t, x(t)) = (\bar{t}, \overline{x}) = (\beta, \overline{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dimostrare che il punto $(\bar{t}, \overline{x})$ appartiene a $\partial\Omega$.

4. **T** Dimostrare il seguente *Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali.* Sia $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Supponiamo che esista una costante A tale che per ogni $t \in I$ e per ogni x^1, $x^2 \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|f(t, x^1) - f(t, x^2)\| \leq A\|x^1 - x^2\|.$$

Siano $t_0 \in I$ e x^0, $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Siano x e y le soluzioni massimali, rispettivamente, dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'intervallo massimale di definizione di x e y è l'intervallo I. Dimostrare infine che per ogni $t \in I$ si ha

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x^0 - y^0\| e^{A|t - t_0|}.$$

Suggerimento: applicare il Lemma di Gronwall.

5. **TF**$*$ Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, b]$ tale che $f \geq 0$ su $[a, b]$. Dimostrare che la funzione $\sqrt{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, b]$.

6. **TF** Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^M$, $M \geq 1$, una funzione integrabile su $[a, b]$, cioè tale che ogni sua componente $f_1, \ldots, f_M$ sia integrabile su $[a, b]$. Ricordiamo che $\int_a^b f = (\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_M) \in \mathbb{R}^M$. Dimostrare che $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, b]$ e che vale

$$\left\| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \mathrm{d}t.$$

Suggerimento: per l'integrabilità sfruttare l'esercizio precedente. Per dimostrare la formula prendere $v \in \mathbb{R}^M$ tale che $\|v\| = 1$ e

$$\langle \int_a^b f, v \rangle = \left\| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \right\|.$$

Legenda
T esercizio teorico
P esercizio pratico
F esercizio facoltativo
$*$ esercizio difficile