

## Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2014-2015

### Foglio 6

1. **T** Siano  $E_1$  e  $E_2$  due sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^N$ . Dimostrare che  $E_1 \cup E_2$  e  $E_1 \cap E_2$  sono misurabili e che vale

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

Ricordiamo che per ogni  $E \subset \mathbb{R}^N$  misurabile con  $m(E)$  intendiamo la misura di  $E$ , cioè  $|E|$ .

2. **T** Per ogni  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$  definiamo

$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1).$$

Dimostrare che se  $E_1$  e  $E_2$  sono misurabili, allora  $E_1 \Delta E_2$  è misurabile.

Sia  $Q$  un pluriintervallo di  $\mathbb{R}^N$ . Per ogni  $E_1, E_2 \subset Q$ , misurabili, diciamo che  $E_1 \sim E_2$  se e solo se  $m(E_1 \Delta E_2) = 0$ . Dimostrare che  $\sim$  è una relazione di equivalenza sull'insieme  $\{E_1 \subset Q : E_1 \text{ misurabile}\}$ .

Sia  $X = \{[E_1]_{\sim} : E_1 \subset Q, E_1 \text{ misurabile}\}$ . Per ogni  $E_1, E_2 \subset Q$ , misurabili, definiamo

$$d([E_1]_{\sim}, [E_2]_{\sim}) = m(E_1 \Delta E_2).$$

Dimostrare che  $d$  è una distanza su  $X$ .

3. **T** Siano  $E_1$  ed  $E_2$  due sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^N$ . Dimostrare che se  $E_1 \subset E_2$  allora  $m(E_1) \leq m(E_2)$  (monotonia della misura).
4. **T** Sia  $A \subset \mathbb{R}^N$ ,  $A$  aperto non vuoto misurabile. Dimostrare che  $m(A) > 0$ .
5. **T** Sia  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una successione di sottoinsiemi di  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Sia  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ . Costruire un esempio in cui  $E_i$  è misurabile per ogni  $i \in \mathbb{N}$  mentre  $E$  non è misurabile (secondo Peano-Jordan).
6. **T** Sia  $a \in \mathbb{R}$  e sia  $E$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^N$  tale che  $E \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \{a\} \subset \mathbb{R}^N$ . Dimostrare che  $E$  ha misura ( $N$ -dimensionale) nulla.
7. **T** Sia  $E \subset \mathbb{R}$  misurabile, tale che  $m(E) = 0$ . Dimostrare che per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , esiste  $c \in \mathbb{R} \setminus E$  tale che  $a < c < b$ . Concludere quindi che  $\overline{\mathbb{R} \setminus E} = \mathbb{R}$ .
8. **T** Sia  $Q$  un rettangolo in  $\mathbb{R}$  e  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Dimostrare che  $f$  è integrabile su  $Q$  se e solo se la sua estensione a zero fuori da  $Q$ ,  $\tilde{f}$ , è integrabile su  $Q_1$  per ogni rettangolo  $Q_1 \supset Q$ .

9. **T** Sia  $Q$  un pluriintervallo di  $\mathbb{R}^N$ . Siano  $f, g : Q \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  limitate. Diremo che  $f = g$  quasi ovunque se  $\{f \neq g\}$  ha misura nulla.

Dimostrare che se  $f = g$  quasi ovunque allora  $f$  è integrabile se e solo se  $g$  è integrabile e in tal caso vale

$$\int_Q f = \int_Q g.$$

Siano  $f, g \in \mathcal{R}(Q) = \{h : Q \rightarrow \mathbb{R} : h \text{ limitata e integrabile}\}$ . Diremo che  $f \sim g$  se e solo se  $f = g$  quasi ovunque.

Dimostrare che  $\sim$  è una relazione di equivalenza sull'insieme  $\mathcal{R}(Q)$

10. **P** Calcolare

- (a)  $\iint_Q xy \log(xy) dx dy$  dove  $Q = [1, 2] \times [2, 3]$   
 (b)  $\iint_Q \frac{xy}{x+y} dx dy$  dove  $Q = [1, 2] \times [2, 3]$   
 (c)  $\iint_Q (x+y) \log(1+x) dx dy$  dove  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$   
 (d)  $\iint_Q x \sqrt{1-y^2} dx dy$  dove  $Q = [1, 2] \times [0, 1/2]$   
 (e)  $\iint_Q (x+y) e^{2xy+y^2} dx dy$  dove  $Q = [1, 2] \times [0, 1]$   
 (f)  $\iint_Q \sin(x+y) dx dy$  dove  $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$   
 (g)  $\iiint_Q \frac{1+2xy}{1+z^2} dx dy dz$  dove  $Q = [-1, 1] \times [0, 1] \times [2, 3]$

11. **P** Sia  $E \subset \mathbb{R}^2$  il quarto di disco di raggio 1 contenuto nel primo quadrante. Calcolare

$$\iint_E y \arcsin(x) dx dy$$

12. **P** Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+2y} & \text{se } (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 2], 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 1 & \text{se } (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 2], y > 1 - x^2 \end{cases}$$

Stabilire se  $f$  è integrabile su  $[-1, 1] \times [0, 2]$  e in tal caso calcolare

$$\iint_{[-1, 1] \times [0, 2]} f(x, y) dx dy$$

13. **P** Calcolare l'area di

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \text{ e } y \geq 1\}.$$

### Legenda

**T** esercizio teorico

**P** esercizio pratico

**F** esercizio facoltativo

\* esercizio difficile