

Esercizi Analisi Matematica II
Anno accademico 2014-2015

Foglio 4

1. **P** Calcolare la matrice Hessiana della funzione f in ogni punto del suo dominio dove f è data da

(a) $f(x, y) = e^x y + xy^2$

(b) $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2) - \frac{1}{xy}$

(c) $f(x, y, z) = xz^3 - \log(x + y^2 z^2)$

2. **T** Sia $N \geq 2$ e sia $P_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, un polinomio omogeneo di grado 2 in N variabili dato da

$$P_2(x) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x^\alpha \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N$$

dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ è una N -upla di numeri interi non negativi (N -multiindice) e a_α è un numero reale, per ogni α .

Determinare, in funzione dei coefficienti a_α , una matrice $N \times N$ B tale che $P_2(x) = \langle Bx, x \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Dimostrare quindi che esiste una matrice $N \times N$ simmetrica A tale che

$$P_2(x) = \langle Ax, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Calcolare gli elementi a_{ij} della matrice, $i, j = 1, \dots, N$, sia in funzione degli elementi della matrice B che dei coefficienti a_α .

3. **T** Sia $N = 3$ e sia $P_3(x_1, x_2, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado 3 in N variabili dato da

$$P_3(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{ijk} x_i x_j x_k$$

dove b_{ijk} è un numero reale, per ogni $i, j, k = 1, \dots, N$. Scrivere P_3 nella forma

$$P_3(x) = \sum_{|\alpha|=3} b_\alpha x^\alpha,$$

dove α è un 3-multiindice, esprimendo i coefficienti b_α in termini dei coefficienti b_{ijk} .

4. **P** Sia data la funzione $f(x, y, z) = \cos(xy) - e^{2zx}$. Calcolare $D^\alpha f(1, 0, -1)$ per i seguenti 3-multiindici α

$$\alpha = (2, 1, 0); \quad \alpha = (1, 1, 2); \quad \alpha = (2, 0, 2).$$

5. **T** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $x^0 \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile k volte in x^0 , $k \geq 1$. Sia P il polinomio di Taylor di grado k della funzione f nel punto x^0 . Dimostrare che per ogni multiindice α , con $|\alpha| \leq k$, si ha

$$D^\alpha P(x^0) = D^\alpha f(x^0).$$

6. **TF*** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $x^0 \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile k volte in x^0 , $k \geq 1$. Supponiamo che P_k sia un polinomio di grado k tale che

$$f(x) = P_k(x) + R(x), \quad x \in A,$$

con il resto R che soddisfa

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{R(x)}{\|x - x^0\|^k} = 0.$$

Dimostrare che P_k coincide con il polinomio di Taylor di grado k della funzione f nel punto x^0 .

7. **P** Sia data la funzione $f(x, y) = 2 - x + 2y - xy + x^3 + 2x^2y - xy^2$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 0)$ e nel punto $(-1, 0)$ (nella rappresentazione canonica). Calcolare quindi

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(-1, 0).$$

8. **P** Sia data la funzione $f(x, y, z) = 3 - 2y + xy + y^2 + 2x^2z - yz^2 + z^3$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 0, 0)$ e nel punto $(1, 0, -1)$ (nella rappresentazione canonica). Calcolare quindi

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(1, 0, -1).$$

9. **P** Sia data la funzione $f(x, y) = \sin(x - y^2)$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 1)$.
10. **P** Sia data la funzione $f(x, y, z) = ze^{2x+yz}$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione f nel punto $(1, 0, 1)$.
11. **PF** Calcolare il polinomio di Taylor di grado k per la funzione f nel punto 0 dove

(a) $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ e $k = 3$

(b) $f(x, y) = ye^{xy+2x^3}$ e $k = 5$

(c) $f(x, y, z) = xz \log(1 + y^2z) + \cos(x^2 - y^2)$ e $k = 7$

12. **TF** Sia $N = 4$. Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado k ($k \geq 0$) in N variabili.

Suggerimento: calcolare quanti sono gli N -multiindici α di peso k . Ragionare per induzione su N . Il caso $N = 1$ è banale. Risolvete il problema per $N = 2$ e ogni $k \geq 0$. Quanti sono i 3-multiindici di peso k ? Sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, fissate $\alpha_3 = j$, j intero compreso tra 0 e k , e contate quanti sono i 3-multiindici di peso k per cui $\alpha_3 = j$. Sommate poi per j che varia da 0 a k . Risolto il caso $N = 3$ potete procedere analogamente per il caso $N = 4$.

13. **TF** Sia α un N -multiindice di peso k , $k \geq 1$. Dimostrare che gli elementi del tipo $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, con $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, N$, che sono uguali a x^α sono in numero di

$$\frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!}.$$

Suggerimento: si consideri il caso $N = 2$. Si osservi che il binomio di Newton afferma che

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_1^j x_2^{k-j} = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x_1^j x_2^{k-j}.$$

Ma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ è tale che $|\alpha| = k$ se e solo se $\alpha = (j, k-j)$, $j = 0, \dots, k$. Quindi il binomio di Newton si legge anche

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Il caso $N = 2$ è quindi dimostrato. Provare quindi a dimostrare la formula generale per induzione su N .

Legenda

T esercizio teorico

P esercizio pratico

F esercizio facoltativo

* esercizio difficile