FACOLTA' DI FARMACIA
Anno Accademico 2007-2008
Programma di recupero dei debiti formativi
in Matematica

1. Algebra.
Equazioni e disequazioni di 1° grado.
Equazioni e disequazioni di 2° grado
Equazioni di grado superiore al secondo
Divisione tra polinomi. Regola di Ruffini
Disequazioni per funzioni razionali
Sistemi lineari 2x2 e 3x3.
Cenni sui determinanti e regola di Cramer.

2. Esponenziali e logaritmi.
Operazioni con esponenziali. Operazioni con i logaritmi.
Sistemi di logaritmi in base *e*, 10, 2.
Trasformazione di logaritmi da una base ad un'altra.

3. Trigonometria
Definizione delle funzioni trigonometriche e loro proprietà.
Formule fondamentali, addizione e sottrazione, duplicazione e bisezione.
Teorema dei seni e di Carnot.
Risoluzione di triangoli rettangoli.
Equazioni trigonometriche.

4. Calcolo Combinatorio.
Disposizioni, combinazioni e permutazioni. Coefficienti binomiali.
Triangolo di Tartaglia, binomio di Newton. Classe di una permutazione.

5. Calcolo vettoriale e applicazioni alla fisica.
Definizione di vettore e spazio vettoriale. Composizione e scomposizione di vettori.
Prodotto scalare e prodotto vettoriale.
Sistemi di riferimento e unità di misura in cinematica, dinamica e termologia.
Equazioni dimensionali.

I Algebra

Il teorema fondamentale dell'algebra ci dice che un polinomio di grado n a coefficienti reali ammette almeno una radice nel campo complesso. Questo equivale a dire che un polinomio di grado n ammette n radici. Si può poi dimostrare che se un polinomio ammette come radice un numero complesso esso ammette anche il complesso coniugato.

Ne segue che un polinomio di grado dispari ammette almeno una radice reale.

Se vogliamo trovare le radici di un polinomio possiamo cominciare dal **primo grado**:

$$p_1(x) = a\,x + b \quad \text{(con a e b reali)}$$

L’equazione a x + b = 0 sarà soddisfatta quando $x = x_1 = -b/a$.

Il grafico della funzione y = a x + b è una retta che interseca l’asse y in y = b e ha una pendenza uguale ad a.

Si può facilmente dedurre anche che se a>0 a x + b > 0 per ogni valore di $x > x_1$ e negativo altrove.

Esempi:

Salario settimanale di un rappresentante (in euro):

s(x) = 3x + 25 dove x è il numero di prodotti venduto.

Costi di produzione: c(x) = 0.40 x + 18000.

Funzione costo: c(x) = costi variabili + costi fissi = materie prime + manodopera + costi fissi = materie prime + assemblaggio + rifinitura + spedizione + costi fissi.

C(x) = 5.50 x + (1.5x + 0.75x + 1.25x) + 50000

Ricavo = prezzo per quantità venduta

Profitto = ricavo – costi: P(x) = R(x) – c(x)

Un polinomio di **2° grado** avrà la forma:

$$p_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \text{(con a, b e c reali)}$$

ha come radici $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$ viene detto il discriminante del polinomio.

Se $\Delta > 0$ il polinomio avrà due radici reali e distinte. Nel piano cartesiano $p_2(x)$ è una parabola con l’asse (x = -b/2a) parallelo all’asse delle ordinate che interseca l’asse delle ascisse nei due punti x_1 e x_2. La concavità è rivolta verso l’alto se il coefficiente di grado massimo a è positivo.

se $\Delta<0$ esso avrà due radici complesse coniugate e quindi la parabola sta tutta sopra o tutta sotto l’asse delle ascisse a seconda che a >0 oppure a< 0.

se $\Delta=0$ esso avrà due radici reali e coincidenti e quindi la parabola è tangente all’asse x nel punto $x_1 = x_2$.

Giova ripetere che un polinomio di secondo grado assume valori concordi con il coefficiente di grado massimo per valori esterni all'intervallo delle due radici e discordi per valori interni.
Risulta inoltre che $p_2(x) = a\,(x - x_1)\,(x-x_2)$.

Esempio:
$R(p) = p\,q$ dove p è il prezzo e q la quantità venduta. Ma q è funzione di p:
$q = 1500 – 50\,p$ per cui $R = p(1500-50p) = 1500\,p - 50\,p^2$.

Per un polinomio di **3° grado** del tipo:

$$p_3(x) = x^3 - b\,x^2 + c\,x - d$$

è conveniente operare una sostituzione di variabile: $x = y + b/3$ ottenendo così l'equazione cubica in forma ridotta: $y^3 + p\,y - q = 0$
dove $p = c - b^2/3$ e $q = d - bc/3 + 2\,b^3/27$
Questo polinomio essendo di grado dispari ammette almeno una radice reale che viene data da: $y_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$ dove $R = q^3/4+p^3/27$
e quindi $x_1 = y_1 + b/3$.
Ad esempio se prendiamo la equazione = $x^3 - x^2 - x - -2 = 0$
Si avrà b=1;c=-1; d=2. Da cui si ricava: p=-4/3; q=65/27; R = 1.36; y_1= 1.667 e infine x_1=2
Si trova anche la formula analoga per il calcolo di x_2 e x_3 ma è più conveniente notare che $p_3(x) = (x - x_1)\,p_2(x)$ dove $p_2(x)$ si ottiene dividendo $p_3(x)$ per $(x - x_1)$ con la regola di Ruffini e trovare x_2 e x_3 risolvendo la equazione $p_2(x) = 0$

	a	b	c	d
x_1		$a\,x_1$	$(a\,x_1 + b)\,x_1$	$[(a\,x_1 + b)\,x_1 + c]\,x_1$
	a	$a\,x_1 + b$	$(a\,x_1 + b)\,x_1 + c$	$[(a\,x_1 + b)\,x_1 + c]\,x_1 + d$

Nel caso dell'esempio:

	1	-1	-1	-2
2		2	(2	2
	1	1	1	0

Per cui: $x^3 - x^2 - x - -2 = (x^2 + x + 1)(x - 2)$.

In generale poi se x_1 è una radice di un polinomio di grado n si ha:

$$p_n(x) = (x - x_1)\,p_{n-1}(x)$$

Il polinomio $p_{n-1}(x)$ si trova dividendo $p_n(x)$ per $(x - x_1)$ estendendo la regola vista sopra.
Per i polinomi di quarto grado il procedimento è ancora più complesso dovendosi ricorrere alle formule di Cardano. Per i polinomi di grado superiore non esiste una regola generale e bisogna procedere con metodi numerici o per tentativi.
Resta semplice la soluzione di casi particolari come la equazione biquadratica
$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$ che si risolve ponendo $y = x^2$.

Di semplice soluzione sono anche le equazioni simmetriche e cioè quelle che hanno uguali oppure opposti i coefficienti equidistanti dagli estremi. Queste equazioni hanno come soluzioni i valori x =1 oppure x= -1 e le altre coppie di radici saranno numeri reciproci tra loro.

II. ALGEBRA DELLE FUNZIONI LINEARI.

1. Matrici.

Una tabella di numeri, reali o complessi, formata da m righe ed n colonne viene detta ***matrice*** m×n ed ha la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .. & .. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .. & .. & a_{2,n} \\ .. & .. & & & .. \\ .. & .. & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & & a_{m,n} \end{vmatrix} = A \qquad \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{vmatrix} = X \qquad \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ .. \\ b_m \end{vmatrix} = B$$

dove $a_{i,k}$ è il k-esimo elemento della i-esima riga.
Se n=1 la tabella si riduce ad una sola colonna e prende il nome di ***vettore colonna***. Se m=1 si ha un ***vettore riga***.
Di solito le matrici si indicano con lettere maiuscole mentre i loro elementi con lettere minuscole munite di indice.
Se m=n la matrice si dice ***quadrata.*** Gli elementi a_{ik} si dicono di posto pari o dispari a seconda che i+k sia un numero pari o dispari. In una matrice quadrata, gli elementi di indice uguale a_{kk} costituiscono la diagonale principale e ono tutti di posto pari.
Se gli $a_{ik} = 0$ per $i \neq k$ la matrice si dice ***diagonale.*** Se inoltre gli $a_{ii} = 1$ la matrice si dice ***unità*** e viene indicata con $I=|\delta_{ik}|$ dove

$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$ viene detto simbolo di **Kronecker**. Per cui: A I = A e I A = A

Una matrice si dice sopra/sotto triangolare se sono nulli tutti gli elementi al di sotto/sopra della diagonale principale.

La **somma** e la **differenza** di due matrici A e B si possono calcolare solamente hanno le stesse dimensioni e si ha $c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$.
Il **prodotto** tra due matrici si può eseguire in diversi modi. Il più comune è quello ***righe per colonne***. Se A è una matrice quadrata (n×n) ed X un vettore colonna di ordine n:

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

In questo caso il numero delle colonne del primo vettore deve essere uguale a quello delle righe del secondo. Il prodotto allora è un vettore colonna.
Perciò un sistema lineare si può scrivere:

$$A\ X = B.$$

Scambiando tra di loro le righe con le colonne di una matrice ($m \times n$) si ottiene una nuova matrice A^t, con m colonne ed n righe, detta ***trasposta*** di A e tale che $a^t_{ik} = a_{ki}$.
Se A è una matrice quadrata, si può trovare talvolta una matrice A^{-1} tale che $A\ A^{-1} = I$. e inoltre $A^{-1}\ A = I$. Questa viene detta la matrice ***inversa** di* A.

2. Determinanti.

Si chiama ***prodotto associato*** di una **matrice quadrata** quello formato da n elementi comunque presi purché a due a due non appartenenti alla stessa riga e alla stessa colonna. Esso si dice di ***classe pari* o *dispari*** a seconda che le permutazioni degli indici *i* e *k* siano della stessa classe oppure di classe diversa.
Determinante di una matrice quadrata è la somma degli n! prodotti associati ciascuno preso con il proprio segno o con il segno cambiato a seconda che il prodotto sia di classe pari o dispari.

Una ***permutazione*** si dice di classe pari o dispari se tale è il numero delle inversioni che essa forma con quella fondamentale.

Per i determinanti si possono dimostrare facilmente le seguenti proprietà:
1) Una matrice quadrata e la sua trasposta hanno determinanti uguali.
2) Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli il determinante è nullo.
3) Se si scambiano tra loro due righe o due colonne il determinante cambia segno.
4) Se in una matrice si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per uno stesso numero k il determinante viene moltiplicato per k.
5) Se in una matrice due righe sono uguali o proporzionali, oppure se una riga è combinazione lineare di altre due, il determinante è uguale a 0.
6) Una matrice quadrata ammette inversa se il suo determinante $|A|$ è $\neq 0$.

3. Calcolo del determinante di una matrice.

Preso un elemento qualunque a_{ik} di una matrice si dice ***Minore complementare*** il determinante della matrice che si ottiene eliminando la riga i-esima e la colonna k-esima.
Si chiama ***Complemento algebrico*** A_{ik} di un elemento a_{ik} il suo minore complementare preso con il segno positivo o negativo a seconda che la somma degli indici di a_{ik} sia pari o dispari.
Teorema di Laplace.
Il determinante di una matrice quadrata di ordine n è uguale alla somma degli n prodotti ottenuti moltiplicando gli n elementi di una riga o colonna per i loro complementi algebrici.

Il determinante di una matrice 1x1 è il valore dell'unico elemento della matrice.
Il determinante di una matrice 2x2 è dato da:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{22}$$

Il determinante di una matrice 3x3 può essere calcolato moltiplicando gli elementi di una riga (o di una colonna) per i loro complementi algebrici.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{12}(a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}) + a_{13}(a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22})$$

Si chiama ***rango o caratteristica*** di una matrice l'ordine massimo dei minori diversi da 0 che si possono estrarre dalla matrice data.

Una matrice A ammette inversa A^{-1} se e solo se det(A) è diverso da 0. In tale caso la soluzione di un sistema $A\times X = B$ è data da: $A^{-1}\times A\times X = A^{-1}\times B$ da cui: $I\times X = A^{-1}\times B$.

5. Equazioni Lineari.

La matematica lineare si occupa del trattamento e della soluzione di fenomeni possono venire descritti mediante equazioni lineari. Essa viene ampiamente usata perché descrive molti fenomeni naturali, economici ecc. o una loro approssimazione, perché permette di trovare facilmente una soluzione e perché i metodi dell'algebra non lineare sono di solito delle estensioni o assomigliano a quelli dell'algebra lineare facilitandone la comprensione.

Def. 5.1.- Una equazione lineare a due variabili x e y, in forma normale è data da:

$$ax + by = c$$

dove *a*, *b*, *c* sono numeri reali e *a* e *b* non possono essere contemporaneamente nulli.

Ad esempio: $2x + 3y = 5$ $\quad -x + \frac{1}{2} y = 0$ $\quad x/3 = 15$ $\quad 2s-4t = \frac{1}{2}$

Non sono lineari: $2x-3xy+y = 10$; $x + y^2 = 6$; $\sqrt{u} + \sqrt{v} = 8$

Mentre: $2x = \frac{5x-2y}{4} + 10$ è facilmente linearizzabile.

Def 5.2.- Una equazione lineare a n variabili $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$
ha la forma generale: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots\ldots a_nx_n = b$

Dove $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sono numeri reali non tutti nulli. Questa può venire espressa anche nella forma: $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b$.

Def. 5.3.- Si dice soluzione o grafico di una equazione lineare l'insieme delle coppie ordinate (x, y) di numeri reali che la soddisfano.

$$S = \{(x, y)/ax + by = c\}.$$

Le coppie di numeri reali che soddisfano un'equazione lineare sono infinite.

6. Grafico cartesiano di una equazione di due variabili.

Ogni soluzione (x, y) di una equazione di 2 variabili può essere rappresentata come un punto di una retta di un piano sul quale sia stato definito un sistema di assi cartesiani.

Per tracciare il grafico di una equazione di due variabili basta quindi trovare due punti, collegarli con una retta e poi estenderla all'infinito o fin dove serve.

Intercetta. Ogni retta non parallela all'asse x interseca gli assi coordinati in due punti detti l'intercetta sull'asse x ed y.

Se a=0 si avrà una retta parallela all'asse x, se b = 0all'asse y. Se infine c = 0 la retta passerà per l'origine del sistema cartesiano di riferimento.

Pendenza. L'equazione della retta già vista in forma normale $ax + by = c$ si può facilmente ridurre in forma esplicita: $y = mx + q$ dove $m = -a/b$ viene detto pendenza o coefficiente angolare della retta e $q = c/b$ intercetta sull'asse y.

7. Equazioni lineari con più di due variabili.

Quando le equazioni lineari coinvolgono più di due variabili, le proprietà algebriche rimangono essenzialmente le stesse, ma cambia o si perde completamente la visione grafica.

8. Sistemi di coordinate tridimensionali. Quando le variabili sono tre, ogni soluzione dell'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

$$ax + by + cz = d$$

si può interpretare come un punto di uno spazio tridimensionale e l'insieme dei punti che la soddisfano stanno su di un piano individuato da una terna di numeri reali (x_1, x_2, x_3) oppure (x_0, y_0, z_0).
Anche per un piano nello spazio si possono individuare le intersezioni con gli assi coordinati, le intercette, e i piani paralleli ai piani coordinati.
$x_1 = k$ (// al piano x_2x_3)
$x_2 = k$ (// al piano x_3x_1)
$x_3 = k$ (// al piano x_1x_2)
e le **tracce** del piano con i piani coordinati che sono le tre rette che collegano i punti intercetta.

9. Equazioni con più di tre variabili. Quando le variabili sono più di tre, diciamo n, una rappresentazione grafica e visiva diventa impossibile. Si parla perciò di un iperpiano di uno spazio ad n dimensioni.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \; a_nx_n = b \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b$$

In queste situazione i concetti di intercetta, pendenza e soluzione della equazione vengono estesi in modo formale.

10. Sistemi di equazioni lineari.

Un sistema di equazioni è un insieme di più equazioni individuato dalle sue dimensioni, cioè il numero delle equazioni m ed il numero delle variabili n. Si parla perciò di un sistema "m per n" o avente dimensioni ($m\times n$). Un normale sistema di due equazioni in due incognite si dirà di dimensioni (2×2), uno avente 15 equazioni e dieci variabili (15×10).
Soluzioni. I valori delle variabili che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni del sistema costituiscono una soluzione del sistema.

11. Sistemi di 2 equazioni in due incognite.

Soluzione grafica. Poiché una equazione di primo grado è rappresentata sul piano cartesiano da una retta, la soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite è l'insieme dei punti intersezione delle due rette.
Queste possono essere incidenti(1 soluzione), parallele ($m_1 = m_2$; $q_1 \neq q_2$) nessuna soluzione o coincidenti($m_1 = m_2$; $q_1 = q_2$) infinite soluzioni.
Per trovare la soluzione si può operare graficamente tracciando il grafico delle due rette e leggendo le coordinate del punto di intersezione; oppure

analiticamente con i metodi di sostituzione, eliminazione o con la regola di Cramer.

Esempio: Il sistema $\begin{cases} 3x - 2y = & -1 \\ x + y = & 3 \end{cases}$ si può risolvere con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y-1}{3} \\ \dfrac{2y-1}{3} + y = 3 \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{2y-1}{3} \\ 2y - 1 + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y-1}{3} \\ 5y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2y-1}{3} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Regola di Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+6}{3+2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9+1}{3+2} = 2$$

Metodo di riduzione:

$$\begin{cases} 50x + y = 10000 \\ 30x - y = -2000 \end{cases}$$

sommando membro a membro si trova: 80x = 8000 e quindi x = 100.
Sostituendo nella prima equazione: y = 10000 - 5000 = 5000

13. Sistemi di m equazioni in due incognite.

Scegliamo due delle m equazioni e risolviamo il sistema 2×2.
a) Se otteniamo una soluzione unica e sostituiamo i valori ottenuti nelle rimanenti, possiamo avere due situazioni: se tutte sono soddisfatte da questi valori, essi rappresentano una soluzione unica per il sistema; se una qualunque equazione non è soddisfatta il sistema non ha soluzione.
b) Il sistema 2×2 non ha soluzioni, allora il sistema m×2 non ne ha.
c) Se il sistema ha infinite soluzioni, bisogna scegliere un’altra coppia di equazioni e ripetere lo stesso ragionamento.

14. Sistemi di 3 variabili.

Se le equazioni sono due, avremo o infinite soluzioni o nessuna, poiché due piani non si possono incontrare in un solo punto. O sono coincidenti o sono paralleli.

Se le equazioni sono m≥3 si può avere una soluzione unica, nessuna soluzione o infinite soluzioni.
Sistemi 3x3. Si ricava una variabile da una delle equazioni e la si sostituisce nelle altre due ottenendo un sistema 2x2 che risolto darà un valore di due variabili. Sostituite nella prima equazione si ottiene la terza e quindi la soluzione del sistema 3x3.
Meno di tre equazioni (m<3). Si da un valore qualunque ad una delle variabili. Le altre formeranno un sistema 2x2.
Più di tre equazioni (m>3). Si procede come nel caso mx2.

Esempio. Consideriamo i due sistemi:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ -x + 2y + 4z = 15 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ -x + 2y + 4 = 15 \\ 4x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

che avranno come matrici:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 11 \\ -1 & 2 & 4 & 15 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 11 \\ -1 & 2 & 4 & 15 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

Il primo sistema ha una sola soluzione. Il secondo ne ha infinite perché basta scartare una delle tre equazioni, dare un valore qualunque alla zeta e calcolare il sistema 2x2 che rimane.

15. Sistemi a n variabili (n>3).

- Si ha un sistema omogeneo quando i termini noti sono tutti nulli.
- Un sistema omogeneo è sempre compatibile perché soddisfatto dalla soluzione banale:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0, \dots\ x_n = 0.$$

I sistemi non omogenei si risolvono con il
Teorema di Cramer. Se det(A) ≠ 0 il sistema $Ax = b$ ha una ed una sola soluzione: $x' = A^{-1} b$

Più in generale, dato il sistema (n+1)×n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & \dots + & \dots & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots + & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \qquad 1)$$

dove $A = |a_{i,k}|$ $(n+1) \times n$ e $B = [A, b]$ $(n+1) \times (n+1)$
si ha:

Teorema 1. Condizione necessaria perché il sistema abbia soluzioni è che sia $\det(B) = 0$.

Teorema 2. Se $\det(B) = 0$ ed A ha caratteristica n il sistema 1) è compatibile e ha una sola soluzione.

Teorema di Rouchè. Sia r la caratteristica di A. Se $r = m$ il sistema è compatibile qualunque siano i termini noti. Se $r< m$ il sistema è compatibile solo se è uguale a 0 il determinante che si ottiene aggiungendo una riga e la colonna dei termini noti.

Teorema di Capelli. Un sistema $m\times n$ è compatibile se e solo se le matrici A e B hanno la stessa caratteristica.

IV Esponenziali e logaritmi.

Ricordiamo alcune semplici operazioni con le potenze:
Somma: $10^3 + 10^5$ si può eseguire soltanto dopo aver sviluppato le potenze.

$10^3 + 10^3 = 2\times10^3$
$10^3 \times 10^5 = 10^8$ (somma degli esponenti)
$(10^3)^5 = 10^{15}$ (prodotto degli esponenti)

Così in generale: $a^x \times a^y = a^{x+y}$ e inoltre $(a^x)^y = a^{xy}$

1. Definizioni.

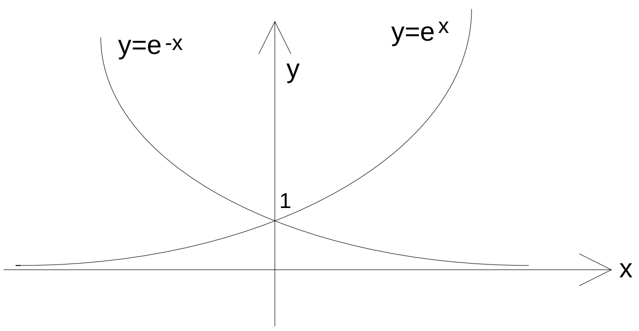
Def. 1.1. Si dice funzione esponenziale una funzione del tipo $f(x) = a^x$ con a positivo e diverso da 1.

Questa funzione é definita per qualunque valore di x e avrà un andamento diverso a seconda che $a > 1$ oppure $a < 1$.
In generale la funzione esponenziale ha le seguenti proprietà:

a) Se $a > 1$, per $x\to-\infty$, $f(x)\to0$ mentre per $x\to+\infty$, $f(x)\to+\infty$.
Se $a < 1$, per $x\to+\infty$, $f(x)\to0$ e per $x\to-\infty$ $f(x)\to+\infty$. In ambedue i casi per $x = 0$, $f(x)=1$.

b) La funzione é sempre positiva.

c) Se $a > 1$ la funzione é sempre crescente, se $a < 1$, decrescente. In ambedue i casi é monotona (lo dimostreremo in seguito).



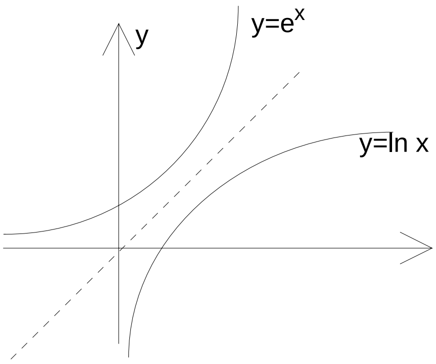
Poiché a^x é una funzione monotona su tutto l'asse reale, essa ammette una funzione inversa. Il dominio della funzione inversa, uguale al codominio della diretta, é $(0,+\infty)$, mentre il suo codominio, uguale al dominio della a^x, sarà $(-\infty,+\infty)$.
Fissato un numero x, la funzione inversa ci darà quel numero y tale che $a^y = x$.

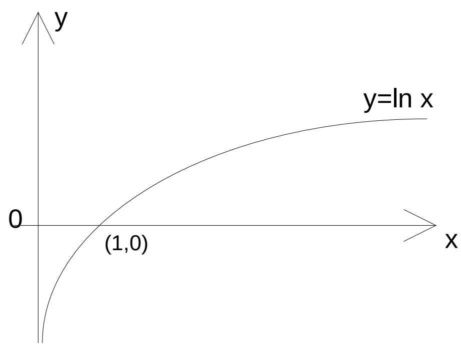
Questo definisce una nuova funzione che chiameremo *logaritmo in base a* di x.

Def. 1.2. Logaritmo in base a di x é il numero y cui bisogna elevare la base a per ottenere il numero x assegnato: $y = \log_a x$.

Ad esempio il logaritmo in base 10 del numero 100 è due perché 10 al quadrato fa 100. E così $\log_{10}(7) = 0.845098$ e $\log_{10}(25) = 1.39794$
Di questi numeri la parte intera viene detta la caratteristica e quella decimale la mantissa.

Essendo la funzione logaritmo inversa della esponenziale, il suo grafico sarà simmetrico di quello di a^x rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.





Le proprietà della funzione $y = \log_a x$ si desumono da quelle della $y = a^x$.
Sia a > 1.
a') La funzione logaritmo é definita per valori di x > 0; cioé non esistono logaritmi di numeri negativi.

b') Il logaritmo della base é 1; $\log_a a = 1$. Il logaritmo di 1 é 0 qualunque sia il valore di a. Il logaritmo é negativo per x < 1 e positivo per x > 1. Per x tendente a 0 il $\log_a x$ tende a $-\infty$ e per x tendente a $+\infty$ esso tende a $+\infty$.

c') La funzione $\log_a x$ é sempre crescente nel suo campo di definizione (se a > 1).

Nei calcoli che fanno uso dei logaritmi, si ricorre spesso ad alcune regole che vengono espresse dai seguenti teoremi:

Th. 1.1. Il logaritmo del prodotto di due numeri é uguale alla somma dei logaritmi dei due numeri:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Dim. Sia $x_1 = \log_a b$ e $x_2 = \log_a c$ da cui $b = a^x$ e $c = a^x$.
Moltiplicando $b \cdot c = a^{x+x}$ si ha $x_1 + x_2 = \log_a(b \cdot c)$ e cioé:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c).$$

In modo analogo si possono dimostrare i teoremi seguenti:
Th. 1.2. Il logaritmo del rapporto di due numeri é uguale alla differenza dei logaritmi dei due numeri:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Th. 1.3. Il logaritmo della potenza m-esima di un numero é uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base:

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b.$$

Th. 1.4. Il logaritmo della radice n-esima di un numero é uguale al rapporto tra il logaritmo del radicando e l'indice della radice:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Def. 1.3. Si dice *sistema di logaritmi* l'insieme dei logaritmi di tutti i numeri reali in una stessa base.

I sistemi di logaritmi di gran lunga più usati sono due: logaritmi decimali (o volgari o di Briggs) che sono in base 10, e i logaritmi naturali (o neperiani) che hanno per base il numero irrazionale:

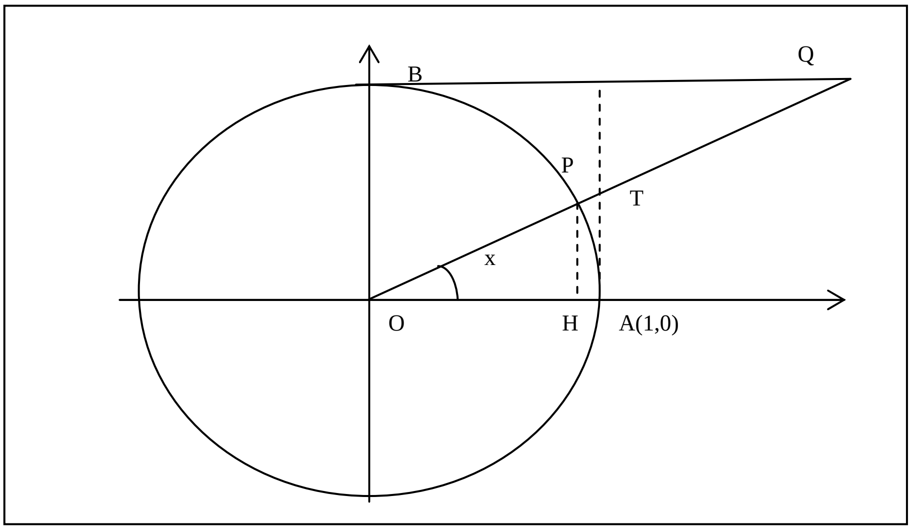
$$e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \qquad e = 2.71828182845.....$$

E' quindi importante trovare una formula che permetta di passare da un sistema di logaritmi ad un altro.
Supponiamo infatti di conoscere il logaritmo di x nella base *a*, vogliamo trovare il logaritmo di x nella base *b*; cioé, noto
$y_1 = \log_a x$ cerchiamo $y_2 = \log_b x$.
Poiché per definizione $b^y = x, \quad \log_a b^y = \log_a x, \quad y \cdot \log_a b = \log_a x$,
e quindi $$y = \log_a x = \frac{\log_b y}{\log_b a}$$

Se in particolare x = a troviamo la relazione: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

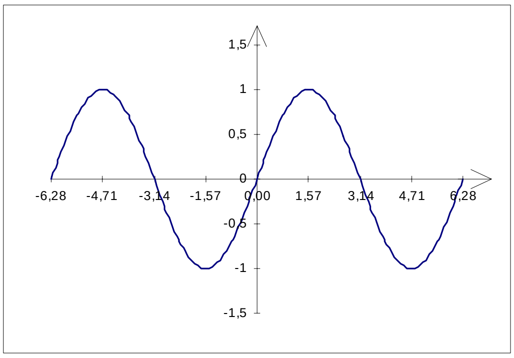
V Trigonometria

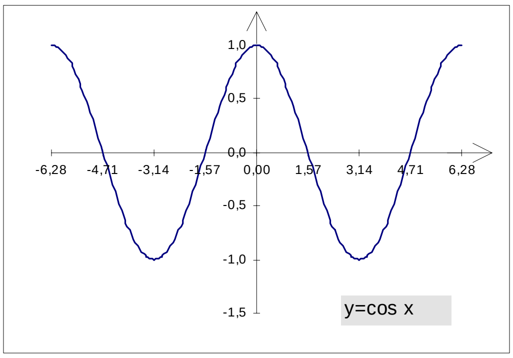
1. Le funzioni trigonometriche.
Prendiamo in considerazione un cerchio di centro O e di raggio unitario, il centro del quale sia l'origine di un sistema di assi cartesiani OXY ortogonale. Prendiamo un angolo acuto di ampiezza x e portiamo il suo vertice in O. Facciamo coincidere il suo lato destro con l'asse delle ascisse, l'altro intersecherà il cerchio nel punto P.
Portiamo da P la perpendicolare all'asse delle ascisse che lo interseca in H e per A la tangente al cerchio che interseca il lato OP nel punto T. La tangente al cerchio nel punto B interseca il lato OP nel punto Q.



Def. 1.1 Da quanto detto seguono le definizioni fondamentali.
Il segmento PH viene detto il seno dell'angolo x, il segmento OH viene detto coseno dell'angolo x, TA viene detto la tangente di x e BQ la cotangente di x.
Normalmente si scrive:
PH = sin x;   OH = cos x;   TA = tan x   e   BQ = cot x.

Il grafico di queste funzioni risulta nelle figure sottostanti:





I triangoli OHP e OAT sono simili e perciò:

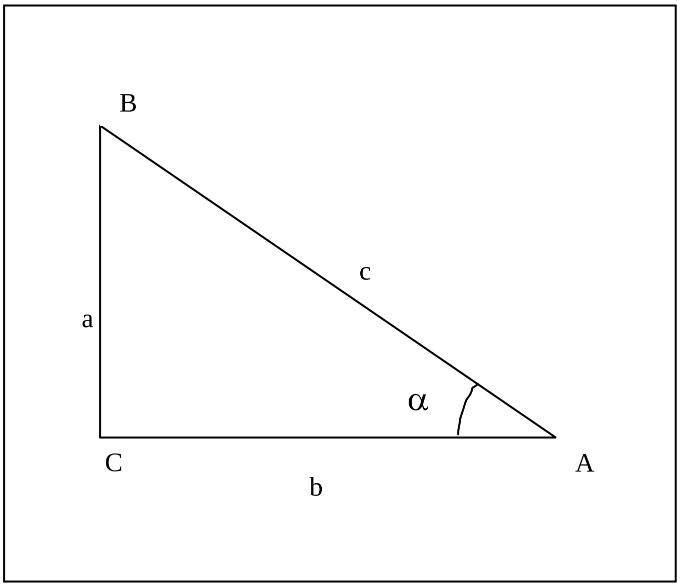
$OH:OA = HP:AT$ e cioè

$\cos x : 1 = \text{sen } x : \tan x$

da cui risulta: $\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

Poiché il triangolo OHP è rettangolo si ha : $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Considerando che il triangolo rettangolo ABC possiamo ricavare alcune relazioni interessanti:



$AC = c \cos \alpha = b$ $\quad CB = c \text{ sen } \alpha = a$ $\quad \tan \alpha = a/b$

Ulteriori relazioni importanti si ricavano tra angoli complementari e supplementari:

$\text{sen } (90 - \alpha) = \cos \alpha : \cos (90-\alpha) = \text{sen } \alpha \quad \tan (90 - \alpha) = \text{cotg } \alpha$

$\text{sen } (90 + \alpha) = \cos \alpha : \cos (90+\alpha) = -\text{sen } \alpha \quad \tan (90 +\alpha) = -\text{cotg } \alpha$

$\text{sen } (180 - \alpha) = \text{sen } \alpha : \cos (180-\alpha) = -\cos \alpha \quad \tan (180 - \alpha) = -\tan \alpha$

$\text{sen } (180 + \alpha) = -\cos \alpha : \cos (180+\alpha) = -\text{sen } \alpha \quad \tan (180 +\alpha) = \text{cotg } \alpha$

Analogamente per gli angoli $270-\alpha$, $270 + \alpha$, $360 - \alpha$ e $360 +\alpha$.

E opportuno notare anche che:

$\text{sen } (- \alpha) = -\text{sen } \alpha \quad \cos (-\alpha) = \cos \alpha \quad \tan (-\alpha) = -\text{cotg } \alpha$

Seguono poi le formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione.

$\cos (\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$ dividendo membro a membro si ottiene:

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

analogamente si ricava:

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ dividendo membro a membro si ottiene:

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Ponendo $\alpha = \beta$ nelle formule di addizione si ottengono le formule di duplicazione:

$\cos 2\alpha = 1\text{-}2\cos^2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha + 1$ $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

Sia ABC un triangolo qualunque, a, b, c i suoi lati α, β e γ i suoi angoli. Si può dimostrare che sussiste la relazione:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Questa relazione rappresenta il **Teorema dei seni**.

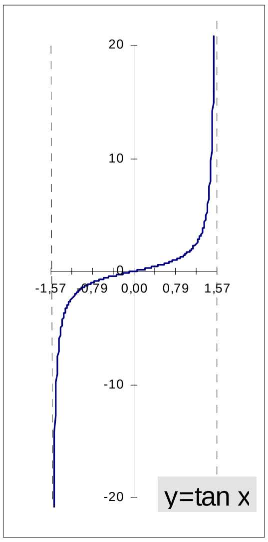
Per la risoluzione dei triangoli rettangoli è importante il **Teorema del coseno** detto anche di Carnot o di Pitagora generalizzato:

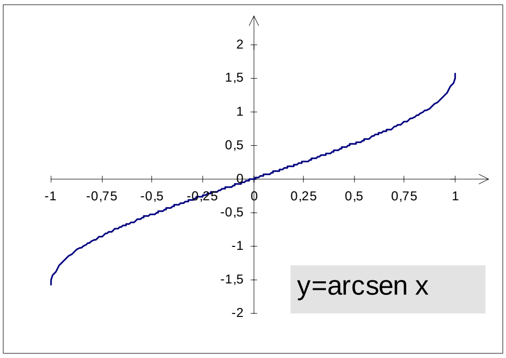
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

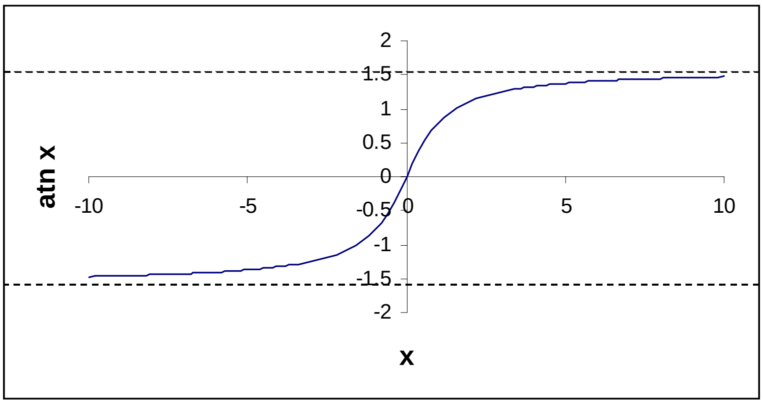
2. Risoluzione dei triangoli rettangoli

I teoremi del seno e del coseno permettono di risolvere i triangoli qualunque quando si conoscono:

1) Due angoli e il lato compreso; b) Due lati e l'angolo compreso; c) Tre lati.







3. Equazioni Trigonometriche.

Nella soluzione di problemi che coinvolgono funzioni trigonometriche spesso si arriva a delle equazioni del tipo:

sen x-cos x -1 = 0   lineari in seno e coseno.

Questa equazione si risolve esprimendo tutto in seno o coseno.
Oppure **omogenee** di primo,secondo o terzo grado (tutti i termini dello stesso grado):

$sen^2x+(1 - \sqrt{3})sen\ x\ cos\ x- \sqrt{3}\ cos^2x = 0$
$sen\ x\ cos\ x + cos^2x = 0$

che si risolvono dividendo ambedue i membri per cos^2x oppure sen^2x e trasformando in tangente.
Nella soluzione delle equazioni è opportuno ricordare alcuni valori notevoli:

sen 30° = 1/2;	cos 30° = √3/2;	tan 30° = √3/3
sen 60° = √3/2	cos 60° = 1/2	tan 60° = √3
sen 45° = √2/2	cos 45° = √2/2	tan 45° = 1

La soluzione dell'equazione, quando esiste è data dal valore delle funzioni inverse
Arcsen x, arccos x e arctan x
Che, dato il valore del seno, del coseno o della tangente dell'angolo ci danno il valore dello stesso.
Da tenere ben presente che le funzioni arcsen x e arccos x sono definite soltanto per valori di x compresi tra -1 e 1. Esse non sono univoche ma forniscono falori a meno di multipli di 2π. L'arcotangente è definita a meno di multipli di π.

IV Calcolo combinatorio.

1. Definizioni

Risulta molto utile nel calcolo delle probabilità e in statistica, determinare in quanti modi si possono dividere gli *n* elementi a_1, a_2, a_3,..., a_n di un certo insieme, in gruppi di *k* elementi.
Un sottoinsieme formato con *k* elementi tra gli *n* dati si dirà di classe *k*. Se un elemento potrà essere ripetuto più volte nello stesso gruppo diremo di considerare gruppi con ripetizioni, altrimenti, se gli elementi di un gruppo sono tutti distinti considereremo dei gruppi senza ripetizioni. In seguito ci occuperemo quasi esclusivamente di gruppi del secondo tipo, e li divideremo in due categorie: *disposizioni* e *combinazioni*.

Def. 1.1. diremo *disposizioni* di classe *k* di *n* oggetti, tutti i gruppi formati con *k* degli *n* elementi dati e tali che due gruppi differiscono tra loro o per qualche elemento, oppure per l'ordine con cui contengono i medesimi elementi.

Il numero delle disposizioni di classe *k* di *n* elementi si indica con Dn,k. Per calcolare questo numero cominciamo col suppore k = 1. In tale caso risulta evidentemente: $D_{n,1} = n$.
Per ottenere $D_{n,2}$ basta osservare che le disposizioni di classe 2 si ottengono da quelle di classe 1 facendo seguire a ciascuna di queste, ordinatamente uno dei rimanenti n-1 elementi. Da ciascuna disposizione di classe 1 si ricavano n-1 disposizioni di classe 2 e perciò $D_{n,2} = n(n-1)$. Le disposizioni di classe3 si ottengono analogamente da quelle di classe 2 facendo seguire a ciascuna di esse uno degli n-2 elementi rimanenti, per cui $D_{n,3} = n(n-1)(n-2)$.
Così proseguendo si ricava infine

$$D_{n,k} = n(n - 1)(n - 2)....(n - k + 1)$$

e cioè il numero delle disposizioni di classe k di n elementi è dato dal prodotto dei k numeri interi consecutivi e decrescenti a partire da n.

Def. 1.2. Si dicono *permutazioni* di *n* elementi le disposizioni di classe *n* di *n* elementi. Esse rappresentano tutte le disposizioni che si possono ottenere in un gruppo di *n* elementi facendone variare l'ordine.

Il loro numero si trova dalla formula precedente ponendo k = n, ed è dato dal prodotto dei primi *n* numeri naturali. Esso si chiama *fattoriale di n* e si scrive *n!*. Perciò:

$$P_n = D_{n,n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... (n - 1) \cdot n = n!$$

Notiamo che $(n + 1)! = (n + 1)n!$.
Si pone poi *per convenzione* $0!=1$.

Def. 1.3. Si dicono *combinazioni* di classe *k* di *n* elementi tutti i gruppi formati con *k* degli *n* elementi e tali che due gruppi differiscono tra loro per almeno un elemento.

Da questa definizione segue che tutte le disposizioni di classe k formate con i medesimi k elementi danno luogo ad una sola combinazione. D'altra parte le disposizioni di classe k che si possono fare con k elementi, permutandoli in tutti i modi possibili sono k!. Ad esse corrisponderà una sola combinazione.

Se indichiamo allora con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni di classe k degli n elementi, ricaviamo $D_{n,k}$ = k!·Cn,k e quindi $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$ che si può anche indicare con $\binom{n}{k}$ e prende il nome di *coefficiente binomiale*.

I coefficienti binomiali così definiti sono numeri interi.

Si dimostra che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{infatti}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad \text{e anche:}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Si dimostra inoltre che

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Questa formula ci permette di ottenere $C_{n,k}$ dati $C_{n-1,k}$ e $C_{n-1,k-1}$ e quindi supponendo *n* e *k* indici di riga e di colonna di una tabella di numeri, possiamo disporre i coefficienti binomiali in un ordine detto Triangolo di Tartaglia. Quì si vede che ciascun elemento è la somma dei due adiacenti della riga precedente.

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
```

La denominazione di *coefficienti binomiali* di questi termini è venuta in seguito allo sviluppo della potenza n-esima di un binomio proposto da Newton:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

In questa formula che prende il nome di formula di Newton si nota come i termini equidistanti dagli estremi hanno gli stessi coefficienti.

2. Classe di una permutazione.

Dati n elementi si fissi una loro permutazione che si dirà *fondamentale*.

Def. 2.1. Diremo che in una permutazione qualsiasi $a_1, a_2, .., a_n$ i due elementi a_h e a_k *fanno inversione* se si seguono in ordine inverso a quello in cui sono disposti nella fondamentale. Il numero delle coppie di elementi che fanno inversione può essere pari oppure dispari. Nel primo caso la permutazione si dice di *classe pari*; nel secondo di *classe dispari*.

Si può dimostrare che una permutazione cambia classe se in essa si scambiano tra di loro due elementi; e inoltre che delle n! permutazioni di n elementi n!/2 sono di classe pari e n!/2 di classe dispari.

3. Esempi ed Applicazioni

1) Nel gioco del poker, ad ogni giocatore vengono distribuite 5 carte da un mazzo di 52. Quante sono le mani possibili?
2) Quante sono le possibili cinquine nel gioco del Lotto?
3) In quanti modi diversi si possono disporre i 24 pazienti di un reparto ospedaliero in stanze da 4 letti?