Giorgio Poretti

Facoltà di Farmacia

Corso di Matematica e Informatica

Matematica

Teoria degli Insiemi e logica degli eventi
Calcolo delle Probabilità ed elementi di Statistica
Funzioni di una variabile: algebriche, razionali, trascendenti
Limiti, derivate , integrali
Funzioni di due variabili
Equazioni differenziali

Informatica

Gli elaboratori elettronici
Linguaggi di programmazione: Basic, HTML, Matlab, Java
Elaborazione dati statistici con Excel

Proposizioni e determinazione del loro ***valore logico*** (**Vero** oppure **Falso)**.

Una ***proposizione*** è un'espressione orale oppure scritta che traduce in forma compiuta un nostro pensiero.

Essa può essere ***semplice*** ("oggi piove", "voglio andare in farmacia", "ho l'ombrello"), oppure ***composta*** ("oggi piove vorrei andare in farmacia ma non ho l'ombrello).

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	?V
F	F	?V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Definizioni Generali.

I farmaci si possono dividere in ***gruppi omogenei* e *categorie***

Essi si distinguono a seconda di:

Tipo di confezione:

a) pillole b) iniettabili c) supposte d) pomate e) sciroppi f) detergenti etc.

Luogo dell’azione farmacologica **Tipo di azione farmacologica**

Luogo della azione farmacologia dalla farmacopea ufficiale

apparato neuromuscolare,
sistema nervoso centrale,
infiammazioni,
apparato renale e cardiovascolare,
funzione gastrointestinale,
chemioterapia delle infezioni parassitiche,
malattie microbiche,
neoplasie, immunologia,
patologie del sangue,
disfunzioni ormonali,
vitamine, dermatologia,
oftalmologia e tossicologia.

Tipo di azione farmacologica:

analgesici,
antibiotici,
ansiolitici,
antiallergici,
antireumatici,
antipertensivi,
cardiotonici,
antinfiammatori ecc..

All’interno di ciascuna categoria potrò sistemare i prodotti in ordine alfabetico di nome commerciale.

Ogni scienza ha dei concetti primitivi

Botanica: *specie*, *famiglie*, *generi*,

Statistica *campioni popolazione*,

Medicina: *sindrome* che è un gruppo di sintomi,

Farmacia: *categorie* di farmaci

specie, classe, gruppo, categoria = ***insieme***.

A = {2, 4, 6, 8}.

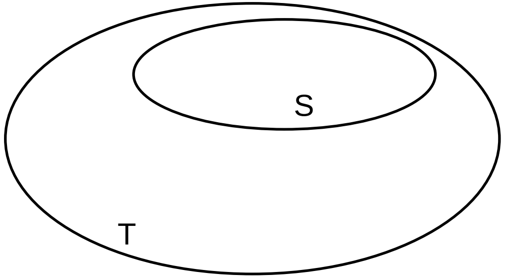
2, 4, 6, 8 si dicono gli *elementi* $a \in A$

B = {x/P(x)} C = {x/x>15} D = {y/G(y)>120}

insieme vuoto Ø ***insieme universo*** ***U***

Relazioni tra insiemi

Def. 2.1. Un insieme S si dice ***sottoinsieme*** di un altro insieme T se ogni elemento di S è anche un elemento di T. Cioè se : $x \in S \rightarrow x \in T$.



In simboli si può scrivere $S \subseteq T$ e si dice che S è contenuto in T.

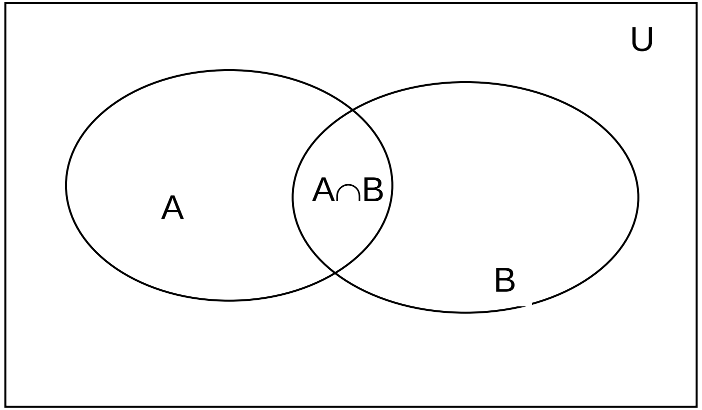
Questa relazione risulta più evidente se i due insiemi vengono rappresentati come due regioni del piano (**diagramma di Venn**).

Per indicare che S non è contenuto in T scriveremo $S \not\subset T$.

Def. 2.2. L'insieme A si dice ***sottoinsieme proprio*** dell'insieme B se si ha $A \subseteq B$ e $A \neq B$. In questo caso scriveremo A =B.

Def. 2.3. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ i due insiemi A e B si dicono ***uguali***.

Operazioni tra insiemi.

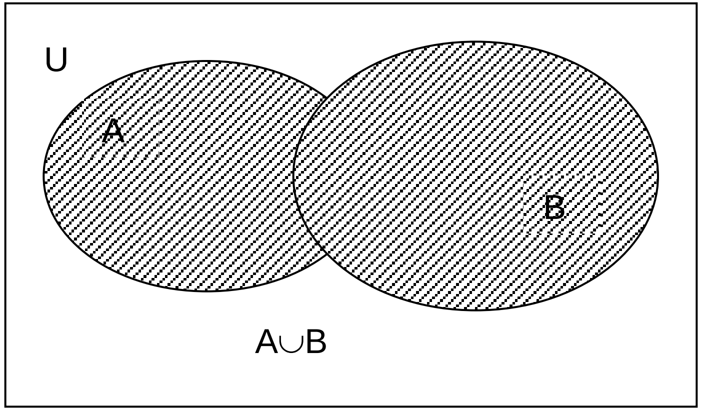


Dati due insiemi A e B si dice ***intersezione*** di A e B (e la si indica con $A \cap B$) l'insieme di tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B.

In simboli $A\cap B = \{x / x\in A \wedge x\in B\}$. Ad esempio se S = {2, 4, 6, 8} e T = {1, 2, 3, 4} allora $S\cap T = \{2, 4\}$.

Nel diagramma di Venn l'intersezione è costituita dalla regione comune ai due insiemi.

Definizione. Se A e B sono due insiemi tali che $A\cap B = \emptyset$ (non contengono elementi comuni) si dice che essi sono ***disgiunti***.



Si dice ***riunione*** di due insiemi A e B (e la si indica $A \cup B$) l'insieme degli elementi che sono compresi in A e in B, inclusi quelli in comune.

In simboli si può scrivere $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$.

Gli elementi di U non appartenenti ad A formano a loro volta un insieme. Nell'esempio precedente sarebbe l'insieme dei pazienti che non hanno lamentato alcun effetto secondario.

Def. 3.4. Si dice ***complementare*** di A rispetto all'universo U, l'insieme di tutti gli elementi di U che non appartengono ad A.
Questo nuovo insieme viene indicato con per cui:

$$\overline{A} = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}.$$

Si deducono facilmente alcune proprietà delle operazioni tra insiemi finora esaminate:

$$A \cup A = A,\; A \cap A = A,\; A \cup \overline{A} = U,\; \overline{\overline{A}} = A$$

e inoltre se $A \subset B$ si ha che $\overline{B} \subset \overline{A}$

Si può anche verificare che , $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e che $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

In simboli $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$ si può verificare che:

$$A - B = A \cap \overline{B} = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

L'insieme **differenza** A – B è quello dei pazienti che hanno, avuto soltanto l'effetto A.

Partizione di un insieme.

Definizione. Si dice ***partizione*** di un insieme A non vuoto una suddivisione di esso in sottoinsiemi che sono disgiunti e tali da esaurire A.

$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_n$ (non vuoti)

1) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup A_n = A$

2) $A_i \cap A_j = \varnothing \quad$ per $i \neq j$

Il numero degli elementi di un insieme finito.

Sia X un insieme finito e sia n(X) il numero dei suoi elementi.

Se A e B sono disgiunti: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ altrimenti:
$n(A) = n(A \cap \overline{B}) + n(A \cap B)$
$n(B) = n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap B)$.

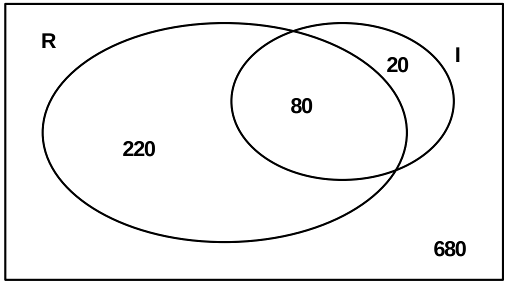
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Esempio 1.

A 1000 individui vengono somministrate dosi supplementari di vitamina C.
Durante l’inverno:
300 prendono almeno un raffreddore (R),
100 l’influenza (I)
80 prendono tutti e due(R e I)

Si chiede:
Quante persone hanno preso solo raffreddore,
quante solo influenza e quante nessuna delle due?
Da questi dati si può dire qualcosa sull’efficacia della vitamina C?

Soluzione:



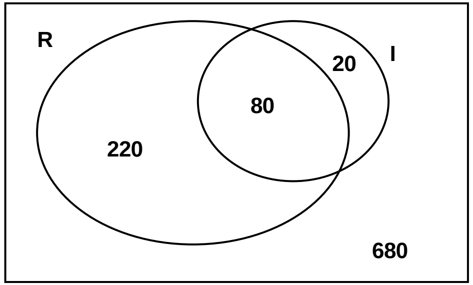
(Frank S. Budnick “Applied Mathematics” McGraw-Hill 1986)

Esempio 1.

A 1000 individui vengono somministrate dosi supplementari di vitamina C.
Durante l'inverno:
300 prendono almeno un raffreddore (R),
100 l'influenza (I)
80 prendono tutti e due(R e I)

Si chiede:
Quante persone hanno preso solo raffreddore,
quante solo influenza e quante nessuna delle due?
Da questi dati si può dire qualcosa sull'efficacia della vitamina C?

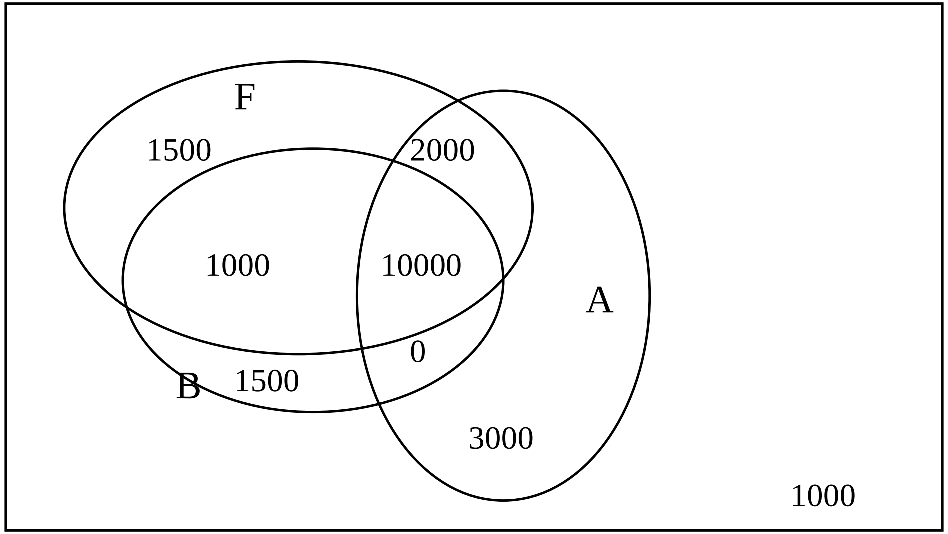
Soluzione:



	RafSi	Raf No	Tot
Inf Si	80	20	100
Inf No	220	680	900
Tot	300	700	1000

Esempio 2.
20000 decessi per cancro al polmone

14500 Fumatori (F)
12500 Bevitoe (B)
15000 >Anziani (A)
11000 $F \cap B$
12000 $F \cap A$
10000 $B \cap A$
10000 $F \cap B \cap A$



Si chiede
Quanti sono le vittime per ogni singola caratteristica
Quanti non hanno nessuna delle tre caratteristiche

Il programma di Screening mammografico a Trieste per la prevenzione del carcinoma mammario.
Il programma di Screening mammografico è rivolto alle donne di fascia di età 50-69 anni:
le donne ricevono una lettera che le invita a sottoporsi gratuitamente ad un esame mammografico presso l'ospedale o una struttura mobile attrezzata (camper).
La maggior parte delle donne che risponde alla chiamata (circa il 55%), risulta negativa all'esame e sarà richiamata dopo 2 anni.

Le donne che invece presentano delle anomalie mammografiche verranno richiamate per una ripetizione della mammografia e se necessario saranno effettuati ulteriori approfondimenti, quali ecografia ed esami citologici.

Nel biennio 2008-2009, a Trieste si sono registrati i seguenti dati:
- 900 totale donne richiamate
- 350 fanno una mammografia
- 780 fanno un'ecografia
- 270 fanno un esame citologico
- 280 fanno mammografia ed ecografia
- 250 fanno ecografia ed esame citologico
- 170 fanno mammografia ed esame citologico
- 150 fanno una mammografia, un' ecografia e per approfondire ulteriormente la lesione anche un esame citologico
- un numero di donne non si presentano al richiamo

Illustrare con i diagrammi di Venn la situazione presentata.

Il Metodo Induttivo

Scienze matematiche
metodo deduttivo
Assiomi
Teoremi

Scienze statistiche
metodo induttivo
osservazioni
eventi
probabilità

Logica degli eventi

Un **evento** (o la proposizione che lo traduce) è un ente logico suscettibile di assumere due soli valori: ***vero* o *falso***.

Evento certo (Ω) ***Evento impossibile (Ø).***

Eventi possibili.
probabilità

Operazioni logiche sugli eventi.

Si dice ***negazione*** di un evento E, l'evento che è falso se E è vero, ed è vero se E è falso.

Si dice ***somma logica*** di due eventi E_1, E_2, l'evento $E_1 \vee E_2$ che è vero se almeno uno dei due è vero, ed è falso se sono entrambi falsi.

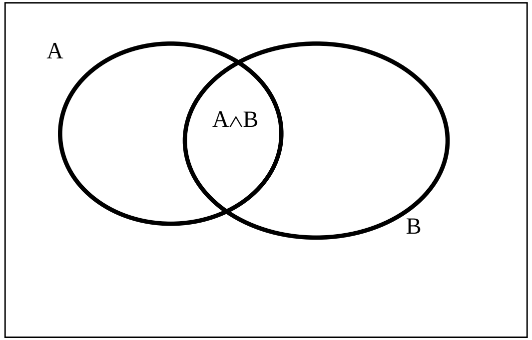
Dati i due eventi E_1 =“il paziente ha preso il farmaco X”, E_2 = “il paziente ha preso il farmaco Y” la somma logica sarà: $E = E_1 \vee E_2$ = ”il paziente ha preso il farmaco X oppure il farmaco Y”

Si ha che $E \vee E = E$ mentre $E \vee \overline{E}$ è l'evento certo.

Si dice ***prodotto logico*** di due eventi E_1, E_2, l'evento $E_1 \vee E_2$ che è vero se ambedue gli eventi sono veri.

Diagrammi di Venn.

Agli eventi si può dare una rappresentazione grafica analoga a quella degli insiemi. Il complementare dell'insieme universo è l'insieme vuoto;
così **la negazione dell'evento certo è l'evento impossibile**.



Due eventi il cui **prodotto è falso** si dicono ***incompatibili***, altrimenti si dicono ***compatibili.***

Eventi logicamente dipendenti.

Siano $E_1, E_2, \dots, E_n$ n eventi tali che

a) $E_1 \vee E_2 \vee \dots\dots\dots E_n = \Omega$ evento certo.

b) $E_h \wedge E_k = \emptyset$ evento impossibile se $h \neq k$.

$E_1, E_2, \dots, E_n$ ***classe completa di eventi incompatibili*** o una partizione dell'evento certo,
Gli E_k, si dicono ***casi elementari possibili* o *costituenti***.

- **Teorema.** Dati n eventi qualsiasi, E_1, E_2, ... E_n, **si può sempre costruire una classe completa di eventi incompatibili**.
-
- Dimostrazione.
- L'evento $E_1 \vee \bar{E}_1$ è un evento certo, come pure $E_2 \wedge \bar{E}_2$ ecc., e quindi anche:
- $(E_1 \vee \bar{E}_1) \wedge (E_2 \vee \bar{E}_2) \wedge .... \wedge (E_n \vee \bar{E}_n) = (E_1 \wedge \bar{E}_2 ..... \wedge E_n) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 .... \wedge E_n) .... (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 .... \wedge \bar{E}_n) = \Omega$
- Ω è un **evento certo**.
- 2^n eventi a due a due **incompatibili** la cui riunione è **certa**.
-
- Alcuni di questi possono essere **impossibili**, gli altri sono i **casi elementari** o **costituenti** la partizione generata dalla famiglia E_1, E_2., ... E_n.

Esempio. Con riferimento al lancio di un dado si considerino **tre eventi**:

E_1 esce un numero *n* dispari

E_2 esce un numero $n > 4$

E_3 esce un numero $n \leq 2$

le cui **negazioni** sono:

$\bar{E}_1$ esce un numero *n* pari

$\bar{E}_2$ esce un numero $n \leq 4$

$\bar{E}_3$ esce un nimero $n > 2$

Procedendo come indicato dal teorema 4.1. otteniamo:

$(E_1 \vee \bar{E}_1) \wedge (E_2 \vee \bar{E}_2) \wedge (E_3 \vee \bar{E}_3) = (E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3)$
$\vee (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3)$

cioè otto eventi A_1, A_2, ...A_8:

A_1 impossibile, A_2 esce il numero 1, A_3 esce il numero 5, A_4 esce il numero 3, A_5 impossibile, A_6 esce il numero 2, A_7 esce il numero 6, A_8 esce il numero 4; che formano una classe completa di eventi incompatibili.

Definizione. Si dice che un evento E è ***logicamente dipendente*** da un insieme finito di eventi $\mathbf{E_1, E_2,....E_n}$ se dalla verità o falsità degli E_k (k=1, 2, 3,..., n) è possibile dedurre la verità o la falsità di E.

Teorema. Ogni evento logicamente dipendente da una **classe completa di eventi incompatibili** $\mathbf{E_1, E_2, ..., E}_n$ è la somma di un certo numero di essi **e viceversa** ogni somma di un certo numero di E_k è un evento logicamente dipendente dalla classe assegnata.

Dimostrazione. La seconda parte del teorema si dimostra subito ricordando che se un evento E è somma di un certo numero r di eventi della famiglia E :

$$E = E_{k1} \vee E_{k2} \vee ......E_{kr}$$

sapendo se ognuno degli E è vero o falso potremo dire se è vero o falso E.

Viceversa supponiamo che sia E logicamente dipendente dagli $\{E_k\}$; prendiamo gli eventi della famiglia $\{E_k\}$ il cui verificarsi comporta il verificarsi di E (ce ne sono perchè E è per ipotesi logicamente dipendente dagli E_k).
Siano essi E_{h1}, E_{h2},......E_{hs}, per definizione di somma logica di eventi segue che:

$$E = E_{h1} \vee E_{h2} \vee ...... E_{hs}$$

Questo evento è vero se almeno uno degli E_h è vero, altrimenti è falso.

Un teorema generale comprende i due precedenti.

Teorema. Un evento E logicamente dipendente da n eventi E_1, E_2, ...E_n è la somma dei costituenti della partizione generata dalla famiglia $\{E_k\}$ e viceversa.

Secondo questo teorema gli eventi $\{E_k\}$ determinano il valore logico di E se esso può essere pensato come la riunione di un insieme dei costituenti della partizione (classe completa di eventi incompatibili) individuata dalla famiglia $\{E_k\}$.

Ad esempio, nel lancio di un dado l’evento “viene un numero pari” è la somma dei tre eventi “viene 2” oppure n”viene 4” oppure “viene 6”.

La probabilità.

A ciascun evento associamo **un giudizio di attendibilità** che ha un carattere del tutto ***soggettivo*** e rappresenta **il grado di fiducia che *un individuo coerente* ha sul verificarsi di questo evento.**

Questo giudizio si esprime con una ***misura*** (e cioè con un numero) che viene chiamata ***probabilità dell'evento* E**, e si indica con

$$\mathbf{P\{E\}}.$$

Per questa misura si dovrà stabilire una **scala** opportuna.

$P\{E\} = 0$ se E è ***impossibil**e*, $P\{E\} = 1$ se E è ***certo***,

$$0 < P\{E\} < 1 \text{ se E è } \textbf{\textit{possibile}}.$$

La ***coerenza*** vuole che se ***p*** è la probabilità che si attribuisce all'evento E, e ***q*** è la probabilità del suo contrario (negazione)

$$\mathbf{p + q = 1},$$

cioè la probabilità dell'evento certo.

Ancora sulla *coerenza*

Se: ***p* = P{E}** è la ***quota di scomessa*** che si è disposti a pagare per ricevere un euro nel caso in cui E si verifichi.

La condizione di coerenza si esprime dicendo che

***p* dovrà essere tale da non assicurare a priori un guadagno certo**.

Si può dimostrare che le due condizioni di coerenza sono ***equivalenti*.**

Due eventi si dicono ***equivalenti*** se il verificarsi del primo implica il verificarsi del secondo e viceversa.

A due eventi equivalenti viene assegnata la stessa probabilità

Teorema delle probabilità totali:

La probabilità della somma di due eventi è uguale alla somma delle probabilità dei due eventi diminuita della probabilità dell'evento prodotto.

$$P\{E_1 \vee E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1 \wedge E_2\}$$

Se $E_1 = E$ ed $E_2 = \overline{E}$, l'evento $E_1 \vee E_2$ è certo mentre $E_1 \wedge E_2$ è impossibile:

$P\{E \wedge \overline{E}\} = 0$ per cui $P\{E\} + P\{\overline{E}\} = 1$.

Questo equivale alla condizione di coerenza del giudizio di probabilità: $p + q = 1$.
Esempi sul lancio di un dado.

Eventi subordinati

Quando si vuole mettere in evidenza che ci sono delle premesse al verificarsi di un evento si dice che ***un evento E è subordinato ad un altro evento H e si scrive E/H***.

L'evento E/H (si legge "***E subordinato ad H***") potrà essere vero, falso o indefinito.

vero, se essendo vero H è vero anche E;

E/H = falso, se essendo H vero E è falso;

indefinito, se H è falso.

L'evento H si dice evento ***ipotesi***, mentre E/H si dice evento ***tesi*.**
Ad esempio. Quale è la probabilità che un individuo sviluppi un tumore al polmone?
Quale è la probabilità che un individuo sviluppi ub tumore al polmone se è un fumatore?

Teorema delle probabilità composte o subordinate.

La probabilità del verificarsi simultaneo di due eventi (non necessariamente indipendenti) è uguale al prodotto della probabilità dell'uno per la probabilità del secondo, subordinatamente al verificarsi del primo:

$$P\{E \wedge H\} = P\{H\} \cdot P\{E/H\} \qquad P\{H \wedge E\} = P\{E\} \cdot P\{H/E$$

$$P\{H\}\ P\{E/H\} = P\{E\}\ P\{H/E\}$$

$$\frac{P\{E/H\}}{P\{E\}} = \frac{P\{H/E\}}{P\{H\}}$$

Teorema di Bayes

$\frac{P\{E/H\}}{P\{E\}} \;\frac{>}{<}\; 1$, $P\{E/H\} \;\frac{>}{<}\; P\{E\}$.

Se in particolare abbiamo che $P\{E/H\} \neq P\{E\}$ significa che il risultato di H aumenta o diminuisce la probabilità che si verifichi E. Si potrà dire cioè che il risultato di H influenza positivamente o negativamente il verificarsi di E e si parlerà di

correlazione.

Età	Probab.
00--10	3.23
10--20	0.65
20--30	1.21
30--40	1.84
40--50	4.31
50--60	9.69
60--70	18.21
70--80	27.28
80--	33.58

Esempio. Nella tabella a siistra sono riportate le probabilità di morte di una certa popolazione. Ci si domanda quale sia la probabilità di morte nel terzo decennio di un individuo che è sopravissuto ai primi due.
Nell’esempio sottostante ci si chiede se c’è correlazione tra sordità e daltonismo nei maschi.

	Sordo	**Udente**	**Totale**
Daltonico	0.0004	0.0796	0.0800
Normale	0.0046	0.9154	0.9200
Totale	0.0050	0.9950	1

$$\rho = \frac{0.0004}{0.0050 * 0.08} = 1$$

Definizione 1.-Si dice che due eventi E ed H sono ***correlati*** (positivamente o negativamente) se $P\{E/H\} \neq P\{E\}$ cioè se sussiste la diseguaglianza.

Definizione 2.- Se $P\{E/H\} = P\{E\}$ si dice che E ed H sono ***stokasticamente indipendenti***. In tale caso il teorema delle probabilità subordinate diventa:

$$P\{E \wedge H\} = P\{H\}\, P\{E\}.$$

	Maschio	**Femmina**	**Totale**
Daltonico	4.23	0.65	4.88
Normale	48.48	46.64	95.12
Totale	52.71	47.29	100

$$\rho = \frac{4.23}{52.71 * 4.88} = 1.65$$

Supponiamo di avere **un farmaco che talvolta da risultati buoni**, ma ogni tanto provoca degli **effetti secondari** di due tipi che chiameremo A e B. Ci si chiede se eliminando l'effetto secondario A si agisce anche sull'effetto B (ci si chiede cioè se i due effetti sono correlati).
Per definire completamente il problema dobbiamo costruirci una classe completa di eventi incompatibili:
$(A \vee \overline{A}) \wedge (B \vee \overline{B}) = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$

Quindi o si verificano contemporaneamente A e B o solo A o solo B, oppure il farmaco non provoca effetti secondari: .
Dagli esperimenti fatti sappiamo che: $P\{\overline{A} \wedge \overline{B}\} = 0{,}90$; $P\{A\} = 0{,}01$; $P\{B\} = 0{,}10$.
Vogliamo vedere se A e B sono correlati o meno e perciò cercheremo di stabilire se P(A/B)/P(A). Calcoliamo quindi P{A/B} che è uguale a per il teorema delle probabilità composte. Bisogna però ancora calcolare $P\{A \wedge B\}$ avremo:
$P\{\overline{A \vee B}\} = P\{\overline{A} \wedge \overline{B}\} = 1 - P\{AB\} = 1 - [P\{A\} + P\{B\} - P\{A \wedge B\}]$; per cui
$0{,}90 = 1 - 0{,}01 - 0{,}1 + P\{A \wedge B\}$ da cui si ricava
$P\{A \wedge B\} = 0{,}01/0{,}1 = 0{,}1 > P\{A\}$ perciò A e B sono correlati positivamente.

Distribuzioni discrete di probabilità.

Gli **eventi riguardanti un certo fenomeno** non sono presi in esame singolarmente, ma considerando una **classe completa di eventi incompatibili Ω.**

Gli elementi di questo insieme prendono il nome di **eventi (o casi) elementari possibili** o costituenti
Se ad ognuno di essi possiamo dare un valore di probabilità in modo che la somma delle probabilità sia uguale a 1 possiamo dire di avere una ***distribuzione di probabilità***.

Il modo in cui si possono assegnare queste probabilità dipende dal problema, dal fenomeno in esame e dai dati a disposizione.

Quando ad esempio non si ha un motivo valido per preferire una alternativa alle altre è spontaneo attribuire la stessa probabilità o ***peso*** a ciascuno degli eventi possibili.

Se Ω contiene n elementi la probabilità che noi assegneremo ad ognuno di essi sarà ovviamente 1/n. Questa situazione si dice ***equiprobabilità***.

Se X è un sottoinsieme di Ω ($X \subset \Omega$) contenente r elementi P{X} = r/n.

E’ molto importante scegliere l' insieme delle possibilità logiche in modo che i singoli eventi elementari siano equiprobabili. In tale caso **la probabilità** di un certo evento X verrà ad essere uguale al **rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili** (**teoria dei giochi**).

Definizione. Si chiama ***frequenza relativa*** il rapporto tra il numero di successi *r* e il numero totale delle prove *n* di un certo esperimento.

Teorema. Se il numero delle prove è molto grande la frequenza relativa più probabile è uguale alla probabilità dell'evento (**legge dei grandi numeri**).

Questo teorema ci permette di identificare la probabilità di ciascun evento con la sua frequenza relativa quando non vi sono altre possibilità di giudizio.

Variabili aleatorie.

Nell'esame di un certo esperimento si definisce un insieme di eventi $\{E_k\}$. Se esiste una legge che fa corrispondere un valore numerico $X(E_k)$ ad ogni elemento di $\{E_k\}$ si dice che la funzione $X(E_k)$ è una ***variabile aleatoria o numero aleatorio.***

Certe volte questo avviene in modo naturale (lancio di un dado, glicemia o pressione arteriosa di un individuo.
Altre volte la cosa è più difficile, come nel caso dello studio del **quoziente di intelligenza** o della correlazione **tra ipocondria e infarto** al miocardio.

La distribuzione bernoulliana.

Gli evento possibili sono *insuccesso* *successo*

La variabile aleatoria: X = 0 1

assume valore 0 nel primo caso e 0 nel secondo.

$$P\{x = 1\} = p \qquad q = P\{x = 0\}$$

.

La distribuzione binomiale.

La variabile aleatoria frequenza assoluta $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$
rappresenta il numero dei successi che si ottengono su n tentativi di un certo esperimento (equiprobabili ed indipendenti)

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{dove:} \qquad \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 1$$

Gli n + 1 eventi $Y_n = k$ (k = 0, 1, 2,...., n) e le loro rispettive probabilità $p_{n,k}$ formano una distribuzione di probabilità che viene detta ***distribuzione binomiale***.

La speranza matematica.

Sia X una variabile aleatoria che può assumere n determinazioni

X: x_1, x_2,.... x_n con probabilità

P: p_1, p_2,.... p_n.

Allora la quantità:

$x_1 \cdot p_1 + x_2\, p_2 + ... + x_n\, p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k = E\{X\}$ prende il nome di ***valore medio* o *speranza matematica*** di X.

Varianza e scarto quadratico medio.

La quantità $\sigma^2\{X\} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - E\{X\} \right)^2 p_k$ viene detta ***varianza*** della variabile aleatoria x, mentre σ è detta ***scarto quadratico medio* o *scarto standard* o *deviazione standard***

Per la **variabile aleatoria bernoulliana** si ha:

$E\{X\} = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$

$\sigma^2\{X\} = q(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = p \cdot q$

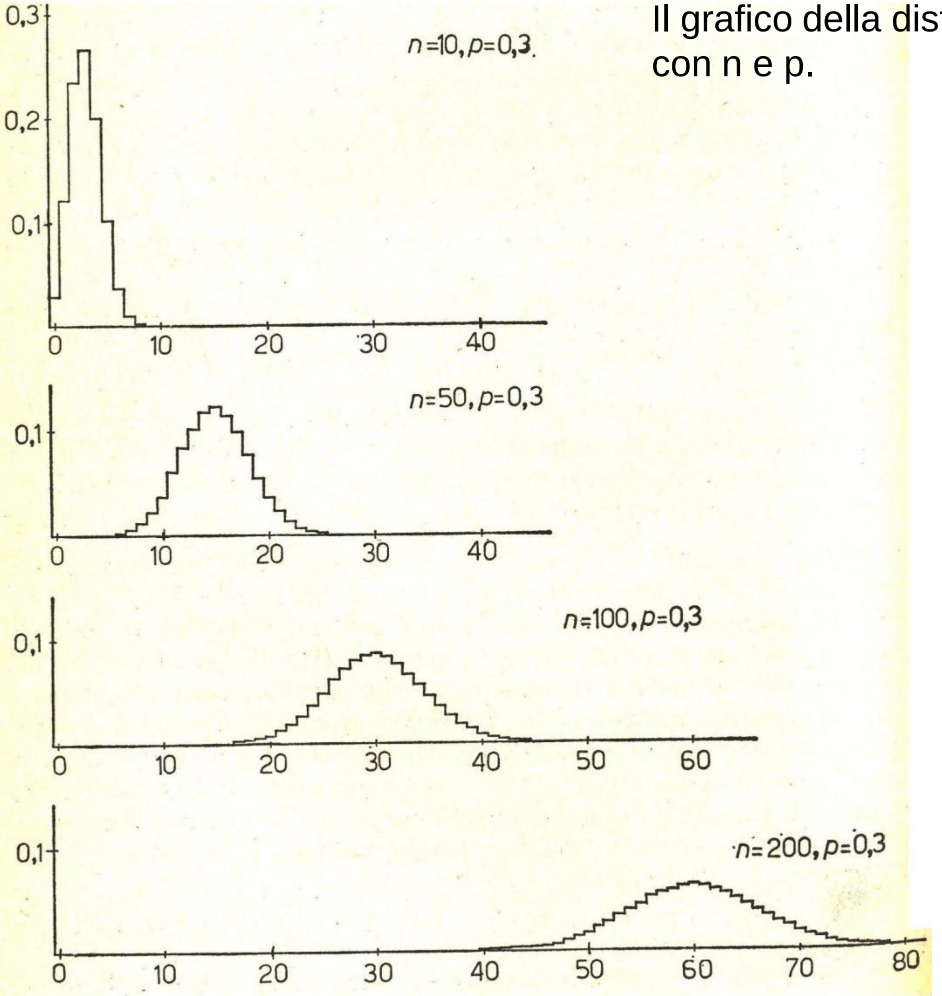
Per la **distribuzione binomiale** se la variabile aleatoria è la **frequenza assoluta** di successo Y si ha:

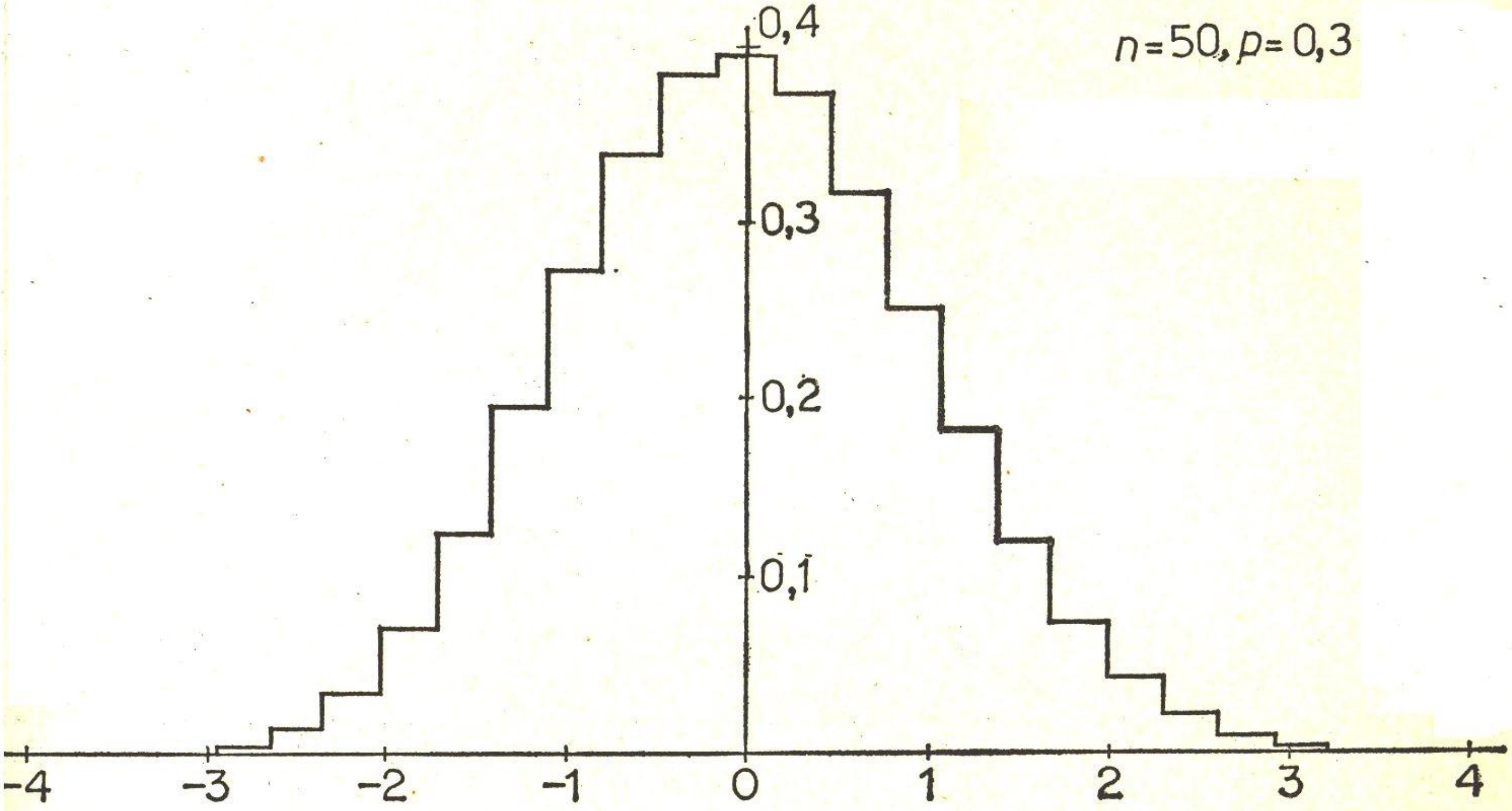
$$E\{Y\} = 0 \binom{n}{0} q^n + 1 \binom{n}{1} pq^{n-1} + 2 \binom{n}{2} p^2q^{n-2} + \ldots\ldots k \binom{n}{k} p^kq^{n-k} \ldots\ldots \binom{n}{n} p^n = n \cdot p$$

e analogamente per la varianza si trova : $\sigma^2\{Y\} = n \cdot p \cdot q$

Se si considera invece per la distribuzione binomiale la variabile aleatoria **frequenza relativa** $\frac{Y_n}{n}$ si trova: $E\left\{\frac{Y_n}{n}\right\} = p$ e $\sigma^2 = \frac{pq}{n}$.

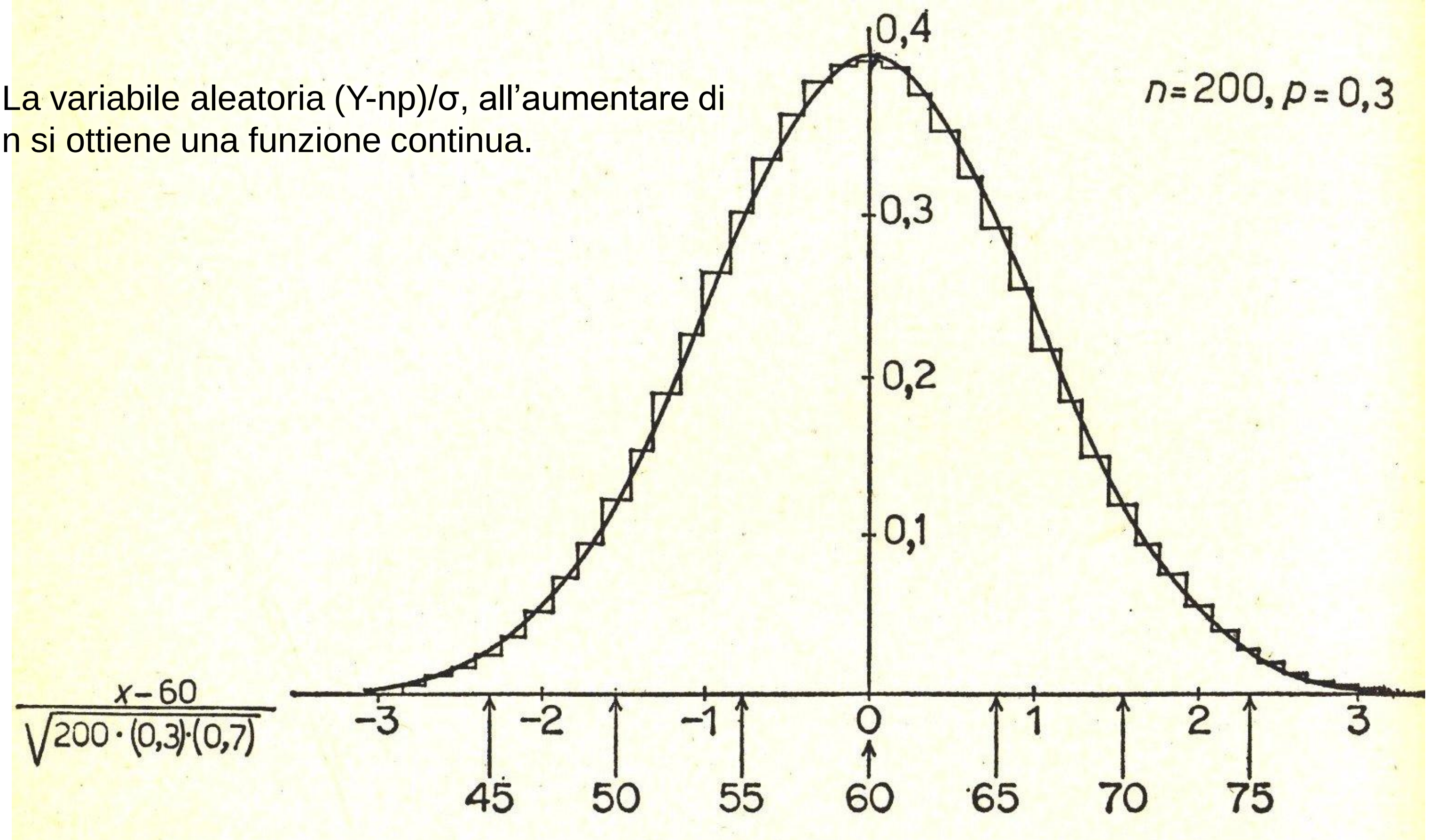
Il grafico della disttribuzione binomiale varia con n e p.





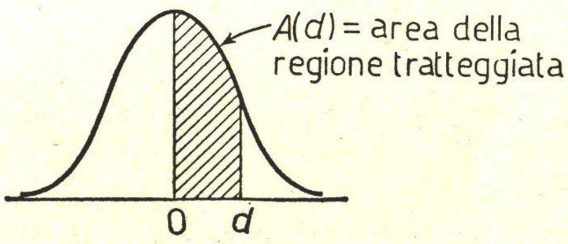
Se si considera la variabile aleatoria Y – np la speranza matematica è 0.

La variabile aleatoria (Y-np)/σ, all’aumentare di n si ottiene una funzione continua.



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2}$$

$$\Pr\left[a < \frac{x - np}{\sqrt{npq}} < b\right]$$



d	$A(d)$	d	$A(d)$	d	$A(d)$	d	$A(d)$
0,0	0,000	1,1	0,364	2,1	0,482	3,1	0,4990
0,1	0,040	1,2	0,385	2,2	0,486	3,2	0,4993
0,2	0,079	1,3	0,403	2,3	0,489	3,3	0,4995
0,3	0,118	1,4	0,419	2,4	0,492	3,4	0,4997
0,4	0,155	1,5	0,433	2,5	0,494	3,5	0,4998
0,5	0,191	1,6	0,445	2,6	0,495	3,6	0,4998
0,6	0,226	1,7	0,455	2,7	0,497	3,7	0,4999
0,7	0,258	1,8	0,464	2,8	0,497	3,8	0,49993
0,8	0,288	1,9	0,471	2,9	0,498	3,9	0,49995
0,9	0,316	2,0	0,477	3,0	0,4987	4,0	0,49997
1,0	0,341					5,0	0,49999997

La distribuzione di Poisson.

Durante uno screening di massa, ogni settimana vengono esaminate diverse centinaia di scolari per l'individuazione di una particolare malformazione cardiaca. Ci si chiede quale è la probabilità che in una settimana k individui risultino positivi all'esame. Si potrebbe affrontare il problema per mezzo della distribuzione binomiale, ma questo presenta notevoli difficoltà di calcolo, poichè il numero degli scolari è molto grande e la probabilità di ciascun scolaro di risultare positivo all'esame è molto piccola.
In questa situazione, e poichè la media m degli individui che risultano positivi nelle varie settimane è verosimilmente costante, la distribuzione binomiale assume una nuova forma (n tendente all'∞, p tendente a 0 ed np = m costante)

$$p_k = \frac{m^k \cdot e^{-m}}{k!}$$

che prende il nome di ***distribuzione degli eventi rari o di Poisson***.
La speranza matematica e la varianza di questa distribuzione sono uguali:

$E\{X\} = n \cdot p = m$ $\qquad\qquad$ $\sigma^2\{X\} = n \cdot p \cdot q = m \cdot (1 - p) = m$

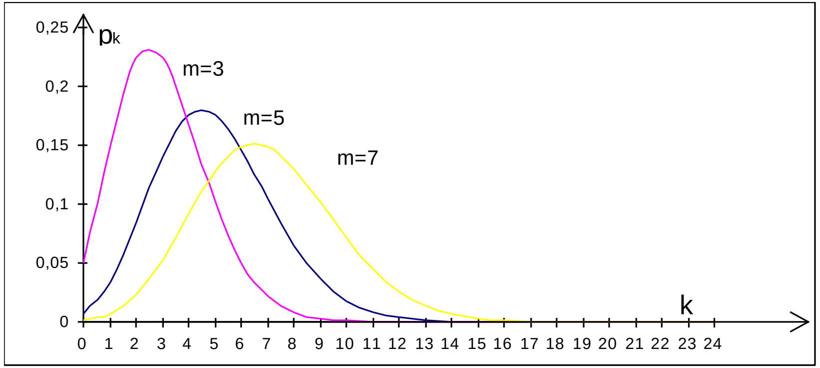
Si nota come la probabilità di una certa determinazione non dipende nè dal numero delle prove eseguite, nè dalla probabilità di ogni singola prova, ma soltanto dal parametro m.

Una variabile aleatoria si distribuisce secondo la legge di Poisson se:

1) la sua speranza matematica è piccola rispetto al numero massimo di eventi possibili per campione (*eventi rari*). Come ad esempio i casi di gotta denunciati in una città in una settimana.

2) Il verificarsi di un evento non dipende dal verificarsi di un altro evento nello stesso campione (*eventi indipendenti*).

Il fatto che è stato denunciato un caso di gotta non deve influire sulla denuncia dei successi (questo non sarebbe più vero nel caso dell'influenza a causa del contagio).



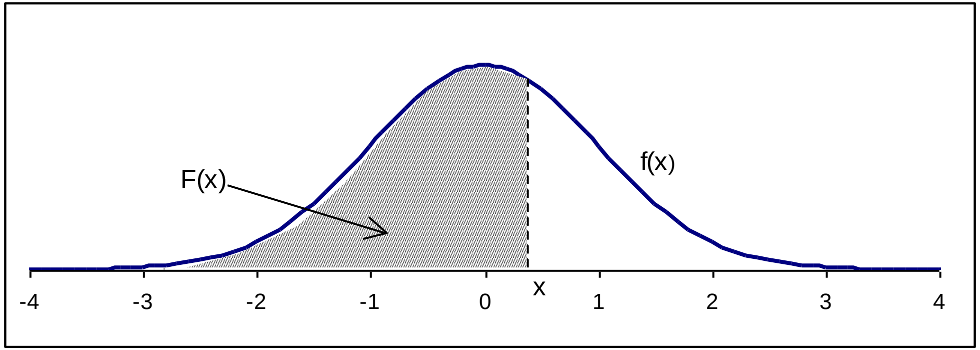
La distribuzione di Poisson dipende dal valore del parametro m.

Variabili aleatorie continue.

La precisione delle osservazioni non può essere aumentata indefinitamente. Per la rappresentazione dei dati quindi si è sempre costretti a suddividerli in classi e perciò una distribuzione di frequenze relative è sempre discreta.

La suddivisione in gruppi è arbitraria poichè certe quantità possono variare con continuità e le chiamiamo **variabili aleatorie continue.**

Per una variabile aleatoria continua X non ci si può chiedere quale sia la probabilità che essa assuma una certa determinazione x ma quale sia la probabilità che X assuma un valore non maggiore di x. Questa quantità dipende da x ed è detta funzione di ***ripartizione*** della probabilità o ***distribuzione*** di probabilità: $F(x) = P\{X \leq x\}$

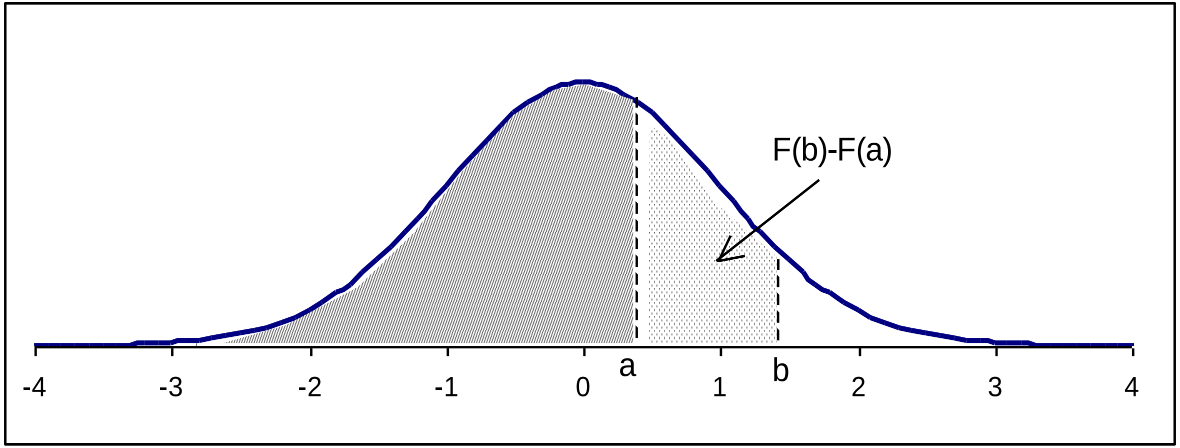


Funzioni densità f(x) e ripartizione F(x) della probabilità

e rappresenta l'area compresa tra l'asse x e una funzione f(x), detta ***funzione densità di probabilità***, da $-\infty$ fino al punto x.

I valori di F(x) ed f(x) si trovano già tabulati e quindi se ad esempio vogliamo calcolare la probabilità che x sia compresa tra a e b basta calcolare la differenza:

$$P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a)$$



Probabilità che la variabile aleatoria cada nell'intervallo (a,b).

Se Δx è un intervallo molto piccolo: $P\{x \leq X \leq x+\Delta x\} = F(x+\Delta x)-F(x) = \Delta x \cdot f(\xi)$ dove ξ è un punto interno all'intervallo $(x, x+\Delta x)$ e si avvicina ad x se Δx tende a zero.

La distribuzione normale o Gaussiana.

Tra le distribuzioni di probabilità quella che è di gran lunga la più importante è quella che passa sotto il nome di ***Distribuzione Normale o di Gauss***.

La sua densità di probabilità per una variabile aleatoria x di speranza matemetica μ e varianza σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Se invece consideriamo la variabile aleatoria $z = (x - \mu)/\sigma$ di valor medio 0 e varianza 1 essa ha densità di probabilità

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

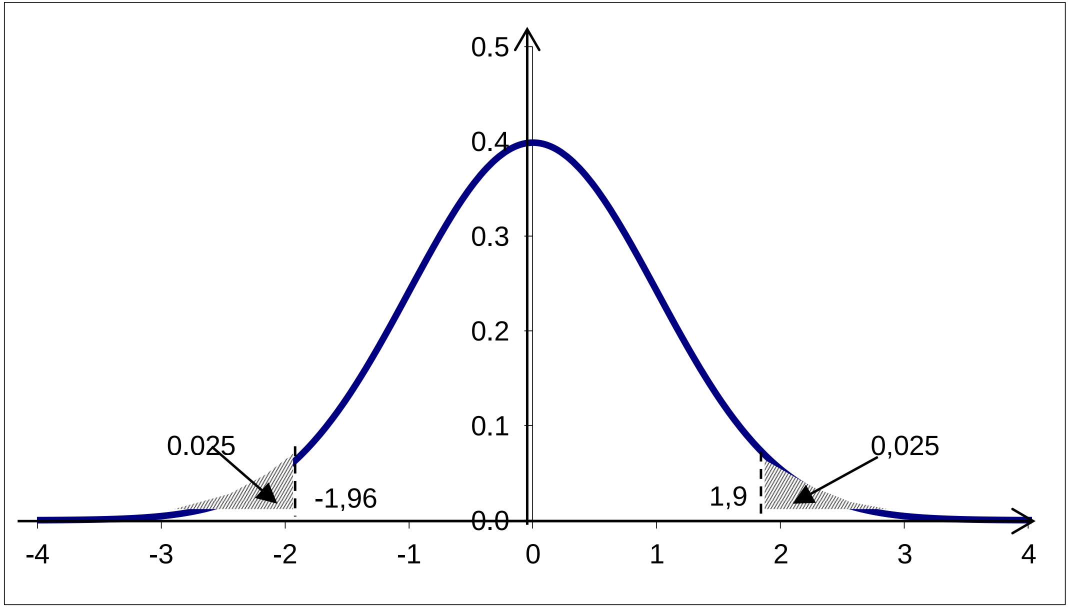
z viene detta ***variabile aleatoria standardizzata***.

E' evidente come da qualunque variabile aleatoria se ne può ricavare una standardizzata. E' la distribuzione di questa variabile che noi studiamo potendo estendere le conclusioni a qualunque altra e sono i valori di questa distribuzione che vengono tabulati allo scopo di usarli nelle applicazioni.

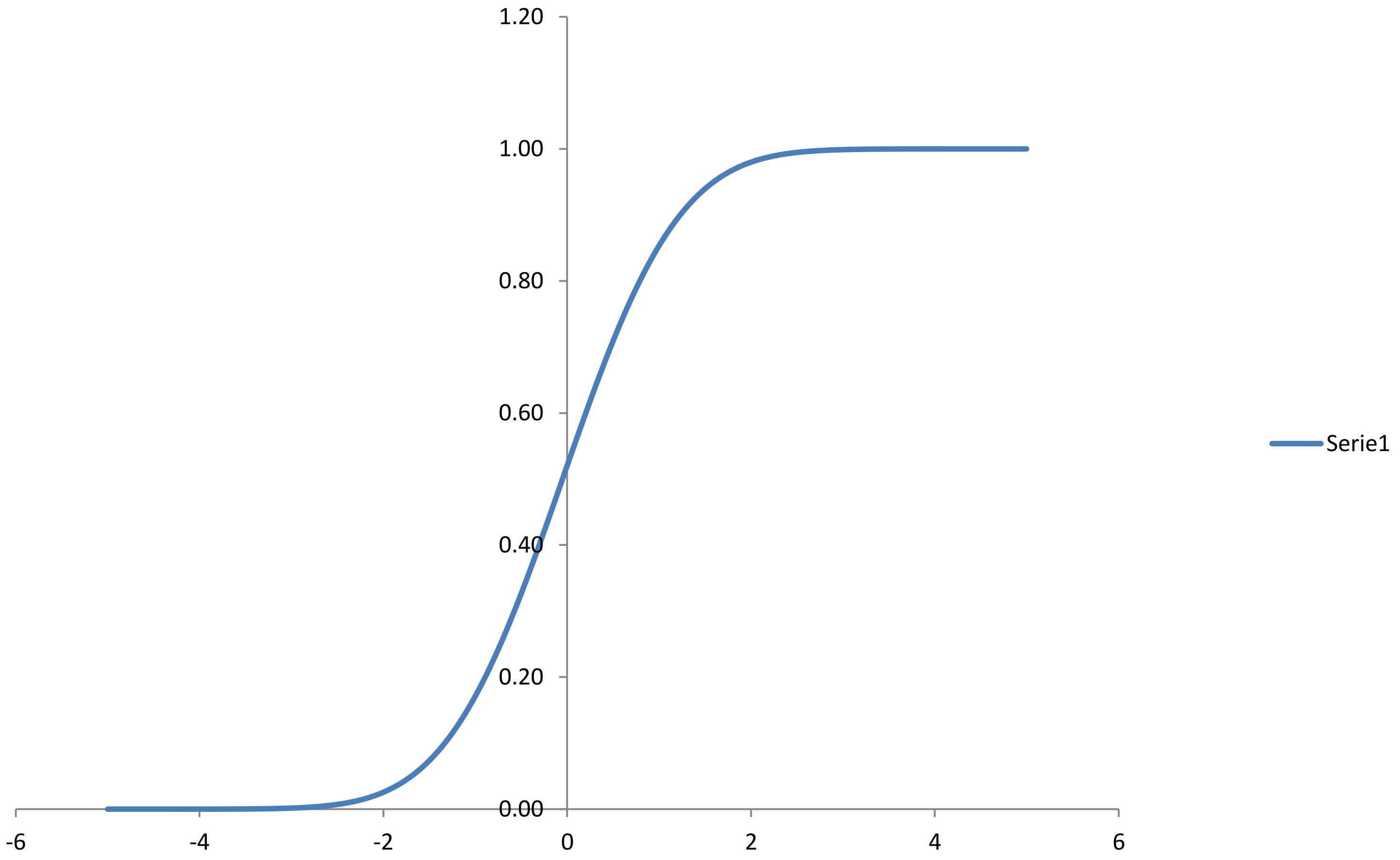
Notiamo innanzitutto che la variabile è definita da -∞ a +∞, ha un massimo nell'origine (moda) ed è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

L'area della superficie compresa tra la curva e l'asse delle ascisse è uguale a 1. Se si esamina la tabella della funzione di ripartizione si nota che tra -1 e +1 l'area è 0.6827, tra -2 e +2 è 0.9505 e tra -3 e +3 è 0.9975.

D'altra parte si può anche notare che la probabilità del 95% è compresa tra ±1.96 mentre quella del 99% è compresa tra ±2.58.
Questi semplici risultati saranno usati spesso in seguito.



La curva normale standardizzata gaussiana


1.20
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
-6
-4
-2
0
2
4
6
Serie1

Stima dei parametri di una distribuzione.

I parametri delle distribuzioni di probabilità delle variabili casuali che intervengono in campo medico sono di solito ignoti.

Sorge quindi il problema di valutarli sulla base di osservazioni effettuate su di un campione. La stima di un parametro può venir espressa mediante un numero

-***stima puntuale*** –

Se l'operatore scelto è buono, ci fornisce un valore che si può considerare vicino al valore del parametro incognito. Questo però non ci dice quanto precisa sia questa approssimazione.

Si preferisce quindi, in certi problemi, determinare un intervallo nel quale si possa dire che *con una certa probabilità* si trova il parametro interessato

-***stima intervallare*** –

$$P\{a \leq \mu \leq b\} = \alpha.$$

Stima puntuale

La stima di un parametro viene calcolata con un insieme di operazioni (operatore) eseguite sui valori del campione.

Di questi operatori ce ne possono esistere diversi per lo stesso parametro, si tratta quindi di scegliere quello più appropriato preferendo un **operatore di stima** che sia:

a) CORRETTO e cioè tale che la sua speranza matematica sia uguale al corrispondente parametro della popolazione.

b) Più EFFICIENTE di un altro, cioè con varianza più piccola.

c) CONSISTENTE e cioè tale che al tendere all' del numero n di elementi del campione essa tenda al corrispondente valore del parametro della distribuzione.

La **media aritmetica** o media campionaria è una stima **corretta**, **consistente** ed **efficiente** per della speranza matematica.

Analogamente si è scelta come **stima della varianza** la quantità:

$$s^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(x_k - \bar{x}\right)^2}{n-1} \qquad \text{con} \qquad \bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}$$

che è una stima corretta e consistente anche **se non è la più efficiente**.
In pratica si usano spesso delle stime inefficienti per comodità di calcolo.

Le Distribuzioni Campionarie

La distribuzione della variabile aleatoria **media campionaria**, è approssimativamente normale, se *n* è sufficientemente grande ($n > 30$), la sua speranza matematica è μ, la sua varianza $\frac{\sigma^2}{n}$.

La **varianza campionaria** ha distribuzione quasi normale per $n > 100$ con media σ^2 e varianza $\frac{\sigma^2}{2n}$.

Questi risultati seguono dal **teorema del limite centrale.**

Stima della media di una popolazione.

La variabile aleatoria **media campionaria** $\overline{X}$ si trova con il 95% di probabilità nell'intervallo

$$\mu \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ e con il 99\% tra } \mu \pm 2.58\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Poichè di solito μ e σ^2 non sono note si usano le loro stime puntuali date dalla media campionaria $\overline{x}$ e dalla varianza campionaria corretta s^2 calcolate sul campione osservato.

Stima della media di una popolazione.

La variabile aleatoria **media campionaria** $\overline{X}$ si trova con il 95% di probabilità nell'intervallo

$$\boldsymbol{\mu \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \textbf{ e con il 99\% tra } \boldsymbol{\mu \pm 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Poichè di solito μ e σ^2 non sono note si usano le loro stime puntuali date dalla media campionaria $\bar{x}$ e dalla varianza campionaria corretta s^2 calcolate sul campione osservato.

Esempio 1. Su di un campione di 100 pazienti è stata misurata una certa grandezza. Dall'esame dei dati si ricava una media $\bar{x}$ = 67.45 ed uno scarto standard s = 2.93 cm. Si vuole determinare l'intervallo di confidenza al 95% e al 99% per la media.

a) **I limiti di confidenza al 95%** sono $\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e quindi: $67.45 \pm 1.96 \cdot \frac{2.93}{\sqrt{100}} = 67.45 + 0.57$cm.

Perciò **l'intervallo di confidenza per la media della popolazione** va da 66.88 a 68.02 il che si può scrivere anche **$66.88 \le \mu \le 68.02$**

Si può quindi dire che la probabilità che la media della popolazione cada tra 66.88 e 68.02 è del 95% oppure 0.95 e si scrive in simboli **$P\{66.88 \le \mu \le 68.02\} = 0.95$.**

Questo equivale a dire che possiamo avere una fiducia del 95% che la media della popolazione cada tra 66.88 e 68.02.

b) **I limiti di confidenza al 99%** sono $\bar{x} \pm 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 67.45 \pm 2.58 \frac{2.93}{\sqrt{100}} = 67.45 + 0.76$ cm. Quindi

$$\mathbf{P\{66.69 \le \mu \le 68.21\} = 0.99.}$$

Distribuzione campionaria per le frequenze relative.

Si considerino **tutti i possibili campioni di ampiezza N** tratti da una certa popolazione. Si calcoli la distribuzione delle frequenze relative.

$$\mu_f = p \qquad\qquad \sigma_f = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Per valori di N sufficientemente grandi (N > 30) questa distribuzione è normale.

Esempio 2. Se esaminando un campione di 200 zecche trovo che 130 sono portatrici di un certo virus mi chiedo quale sia, la percentuale delle zecche infette in quella zona con una probabilità del 95%: $\mu_f - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}65 \times 0{,}35}{200}} \leq P \leq \mu_f + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}65 \times 0{,}35}{200}} = 0{,}65 \pm 0{,}066$

Distribuzione campionaria delle differenze tra i parametri di due campioni.

Date due popolazioni si estragga dalla prima un campione di N_2 elementi sul quale si calcoli il parametro S che ha una distribuzione di media μ_1 e scarto standard σ_1. Analogamente dalla seconda popolazione si prende un campione di N_2 elementi, di media μ_2 e scarto standard σ^2

Se i due campioni sono indipendenti tra di loro la variabile aleatoria S_1 - S_2 avrà una distribuzione di media:

$$\mu_{s_1 - s_2} = \mu_{s_1} - \mu_{s_2} \quad \text{e SQM:} \quad \sigma_{s_1 - s_2} = \sqrt{\sigma^2_{s_1} - \sigma^2_{s_2}}$$

In particolare se X_{1_1} ed X_2 le medie campionarie di due popolazioni la distribuzione della variabile casuale X_{1_1} - X_2 avrà media:

$$\mu_{X_1 - X_2} = \mu_{X_1} - \mu_{X_2} \quad \text{e SQM:} \quad \sigma_{X_1 - X_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{X_1}}{N_1} - \frac{\sigma^2_{X_2}}{N_2}}$$

Lo stesso risultato vale per popolazioni finite se le estrazioni sono con reinserimento, altrimenti bisogna moltiplicare $\mu_{X_1 - X_2}$ per il fattore correttivo: $\frac{N_p - N}{N_p - 1}$

REGOLE DI DECISIONE

Ipotesi e osservazioni.

Se lanciamo in aria una moneta e viene per dieci volte sempre testa, possiamo dire qualcosa sulla probabilità che la moneta sia truccata?

Abbiamo già visto che la probabilità di ottenere *k* teste su *n* prove è data dalla distribuzione binomiale: $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Con una moneta regolare p = 1/2 e perciò la probabilità di ottenere dieci teste è

$$\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}.$$

Perciò dovremmo attenderci di ottenere dieci teste di fila una volta ogni mille tentativi.

Supponiamo ora che nei nostri dieci lanci abbiamo ottenuto sette teste e tre croci. Quali conclusioni possiamo trarre sulla regolarità della moneta?

Errori di decisione.

Nell'applicare una regola di decisione si possono commettere due tipi di errore: rifiutando un'ipotesi che avrebbe dovuto essere accettata (I) oppure accettando un'ipotesi che avrebbe dovuto essere rifiutata (II). **Il livello di significatività di un test è la massima probabilità con la quale si vuole rischiare di commettere un errore del primo tipo.**

Perchè **una regola di decisione** sia buona, essa deve **minimizzare gli errori di decisione**. Per quelli di prima specie il problema si risolve diminuendo il livello di significatività.

Gli errori di seconda specie sono strettamente correlati con quelli di prima per cui la diminuzione della probabilità di uno provoca l'aumento di quella dell'altro.

Ambedue le probabilità possono essere diminuite solamente aumentando le dimensioni del campione.

Fissate le probabilità dei due tipi di errore si può determinare quanto deve essere grande il campione.

Decisioni Statistiche.

Questi due esempi rispecchiano un problema generale: **dalla osservazione di un campione si vuole trovare una conferma o una smentita ad una ipotesi** che è stata fatta su di un parametro della popolazione dalla quale è stato tratto il campione.

A tale scopo bisogna stabilire **una regola di decisione (test dell'ipotesi)** che permette di discriminare in modo univoco tra le due (o talvolta più) alternative.

Perciò **formulata l'ipotesi H_0 (ipotesi nulla)** si calcola la probabilità di presentarsi che avrebbe il campione osservato oppure uno ancora più raro, nel caso in cui tale ipotesi fosse vera. Se questa probabilità è minore di un certo valore prefissato α detto livello di significatività questa ipotesi viene respinta e viene accettata la sua negazione H_1 (ipotesi alternativa) con un grado di fiducia o livello di confidenza $1-\alpha$.

Regole di decisione e distribuzioni di probabilità.

Se si vuole decidere sulla rarità di un certo evento **bisogna riferirsi** ad una distribuzione di probabilità.

Perciò i test statistici di uso più frequente si distinguono tra loro per la distribuzione alla quale fanno riferimento: normale, t di Student, χ^2, F di Fisher ecc..

Alla fine degli anni quaranta sono stati introdotti dei test che non fanno riferimento ad alcuna distribuzione (test non parametrici) come quella dei **ranghi appaiati di Wilcoxon** che comunque quando si possono applicare, sono altrettanto affidabili.

Test basati sulla distribuzione normale.

Le variabili campionarie si **distribuiscono secondo la legge normale**.

Si calcola il punto z relativo al campione osservato e se **questo cade fuori dell'intervallo di confidenza prefissato l'ipotesi nulla verrà rifiutata**. Questo intervallo sarà q = $\pm$1.96 se il livello di significatività è di 0.05 e q = $\pm$2.58 se esso è di 0.01.

Così ad esempio volendo decidere se un campione di *n* misure di valor medio campionario X proviene da una popolazione di media μ e SQM σ si calcola:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Sostituendo eventualmente σ con *s,* lo scarto quadratico medio campionario qualora, σ non fosse conosciuto. Analogamente se P è la percentuale di successi in un campione di probabilità *p* si calcola:

$$z = \frac{P - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

In questo modo si possono confrontare le differenze tra due medie o tra due frequenze relative.

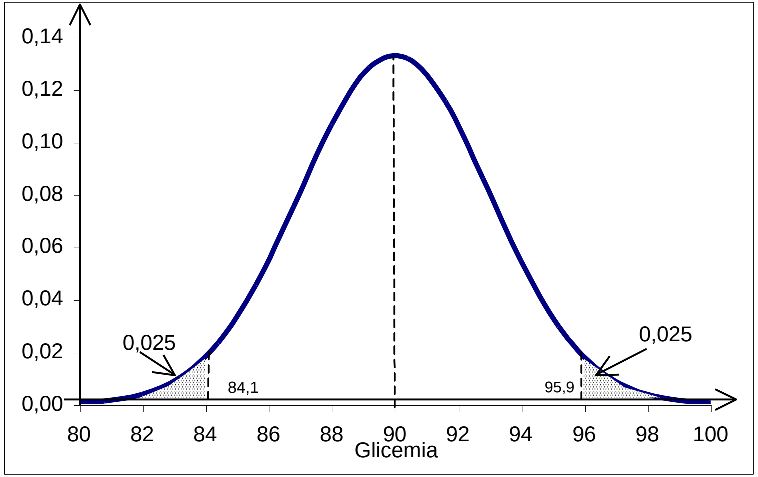
Esempio Il valor medio della glicemia negli individui sani è di 90mg% con scarto standard di 24 mg%.

Volendo determinare se questi valori vengono alterati dalla somministrazione di un nuovo farmaco è stato preso un campione di 64 pazienti per i quali è stato calcolato un valor medio di 100 mg% mentre la varianza è rimasta invariata.

Dobbiamo decidere tra le ipotesi

H_0 μ = 90 mg% il farmaco non provoca nessun effetto;

H_1: $\mu \neq$ 90mg% il farmaco provoca un aumento della glicemia.



Test della glicemia con livello di significatività di 0,05.

Poichè un aumento di glicemia può risultare dannoso si vuole essere sicuri di non commettere un errore di prima specie (accettare H_0 quando è falsa) e perciò si stabilisce un livello di significatività α = 0,01. Per cui:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - 90}{\frac{24}{\sqrt{64}}} = \frac{100 - 90}{3} = 3{,}33$$

Essendo questo valore maggiore di 2,58 possiamo concludere che **la glicemia è stata** sensibilmente **alterata** ad un livello di confidenza del 99%.

Test a una coda o a due code.

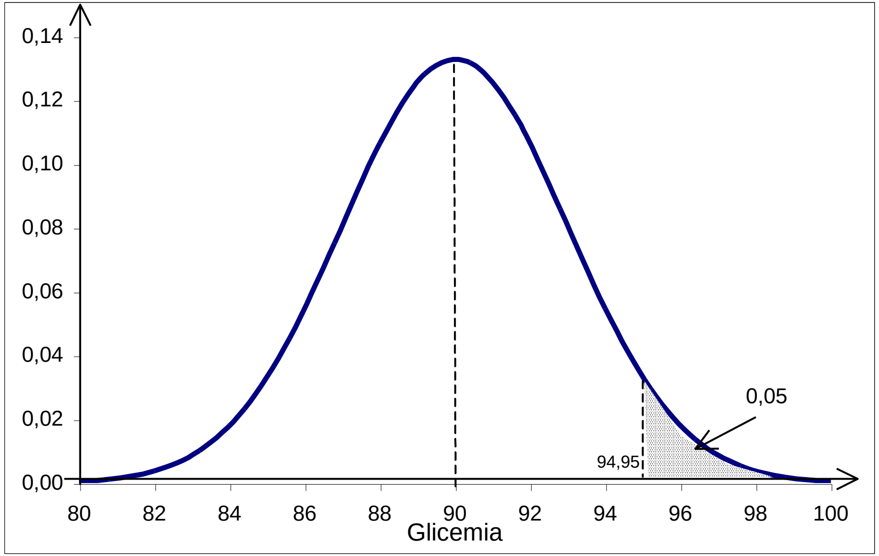
In questo esempio si è parlato di glicemia "alterata" intendendo così che per effetto del farmaco esso **avrebbe potuto sia aumentare che diminuire** (H_1: $\mu \neq 90$).

Supponiamo invece che una eventuale diminuzione della glicemia non sia importante, mentre interessa solamente controllare un suo eventuale aumento ($H_1 > 90$).

In questo caso si prenderanno in considerazione solamente i valori di z positivi per i quali l'evento $z > 2.33$ si presenta con valore 0.01 di probabilità.

Questo fatto ci fa distinguere tra due tipi diversi di test, cioè quelli ad una o a due code a seconda che i valori del parametro in esame che si considerano come estremi si distribuiscono su uno solo o su ambedue i lati (code) della distribuzione.

Livello di Significatività	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
Test a 1 coda	1.28	1,65	2.33	2.58	2,88
Test a 2 code	1,65	1,96	2.58	2,81	3.08



Test ad una coda sulla distribuzione normale.

Ritornando ora al problema della glicemia si confrontino le due ipotesi:

H_0 : μ = 90 mg%
H_1 : μ > 90 mg%

Considereremo ora un test ad una coda e perciò accetteremo l'ipotesi H_0 solo se z<2.33.

A questo punto si può anche calcolare quale sia il rischio di commettere un errore di seconda specie. Posto infatti: z = 2.33 si trova $\frac{(\bar{x}-90)}{3}=2.33$ da cui si ricava: $\bar{x}$ = 97.

Nell' ipotesi H_1 invece: z = $\frac{(97-100)}{3}=-1$. Per cui dalle tabelle si ricava che: p = 0.1587.

Questa è la **probabilità di accettare H_0 quando invece H_1: μ = 100 è vera** e cioè quella di accettare come non dannoso il farmaco quando in realtà lo è.

INSIEMI NUMERICI

Numeri N**aturali N** (0,1,2,3, …..) R**elativi Z** (+1, -1, +2, -2, ….),R**azionali Q** (+2/3, -4/5, +1,25, -5,73 …..), **Irrazionali** e **Reali R** ($\sqrt{2}$, 3,14159265….), **Immaginari e Complessi C** (3 – 2i, -2+5i, …..).
Una trattazione approfondita degli insiemi numerici viene effettuata nei corsi di Algebra.

Intervalli.

Definizione 1. Se ***a*** e ***b*** sono numeri reali con ***a*** < ***b***, chiameremo ***intervallo chiuso*** da ***a*** a ***b*** , l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra ***a*** e ***b*** inclusi ***a*** e ***b*** stessi; in simboli [***a,b***] = {x / ***a*** ≤ x ≤ ***b***}.

a estremo inferiore b estremo superiore

intervallo ***aperto*** : (***a,b***) = {x / ***a*** < x < ***b***}.
Chiuso a destra e aperto a sinistra (***a,b***] ; chiuso a sinistra e aperto a destra [***a,b***).

Definizione 2 Un intervallo si dice ***limitato*** se gli estremi ***a*** e ***b*** sono numeri finiti, si dirà invece ***illimitato*** se almeno uno dei due estremi coincide con ±∞.

limitato superiormente se esiste un numero *k* tale che per ogni $x \in$ I risulti $x < k$.

Definizione 3 Se *a* è un numero reale qualunque ed *s* un numero positivo, definiamo come ***intorno*** di centro ***a*** e raggio ***s*** l'intervallo aperto ***(a-s,a+s)*** e lo indichiamo con il simbolo $I_s(a)$.= {x/¦x-a¦ <s}, e cioè i punti di $I_s(a)$ sono quelli che si trovano entro una distanza *s* da *a*.

Definizione 4. Si dice ***punto di accumulazione*** di un insieme D un qualunque punto in ogni intorno del quale cade sempre almeno un punto di D. (Esso può anche non appartenere all'insieme D). ***insieme derivato***

Coppie ordinate e prodotti cartesiani.

A = {1,2,3,4} i sottoinsiemi {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,1}, {2,2}, {2,3}.... di coppie o paia.

Se {1,2} è diverso da {2,1} la coppia si dirà ***ordinata***.

Def. 2.1. Due coppie ordinate *(a,b)* e *(c,d)* sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$.

Def. 2.2. Siano A e B due insiemi, diremo prodotto cartesiano di A e B (e lo indicheremo con $A \times B$) l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) per le quali $x \in A$ ed $y \in B$.

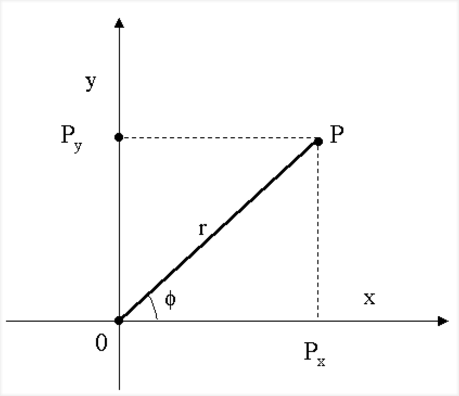
In simboli $A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$.

Se S = {a,b,c} e T = {1,2} allora: $S \times T = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$.

Coordinate cartesiane di un punto su di un piano.

$$d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_1C}^2 + \overline{P_2C}^2 = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Coordinate Polari

Conversione da coordinate cartesiane a polari e viceversa:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Phi = \mathrm{atn}(\frac{y}{x}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r \cos\Phi \\ y = r \sin\Phi \end{cases}$$

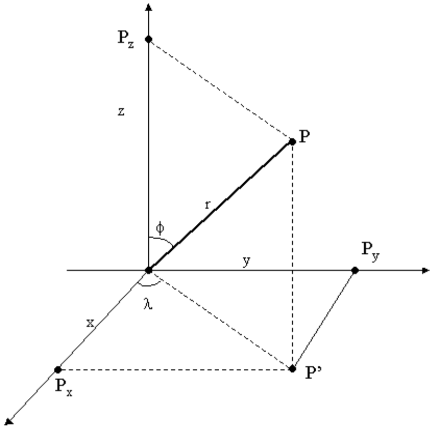
Coordinate cartesiane e sferiche di un punto nello spazio.

Distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_1C}^2 + \overline{P_2C}^2 = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

Punto medio M del segmento P_1P_2

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



Formule di passaggio da coordinate cartesiane

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \mathrm{atn}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \lambda = \mathrm{atn}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r \text{ sen } \varphi \cdot \cos \lambda \\ y = r \text{ sen } \varphi \cdot \text{ sen } \lambda \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

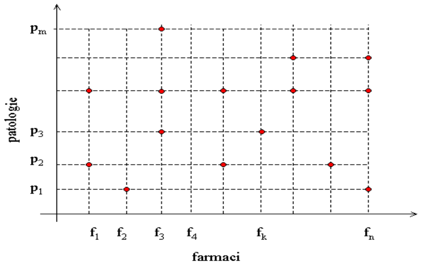
RELAZIONI E FUNZIONI

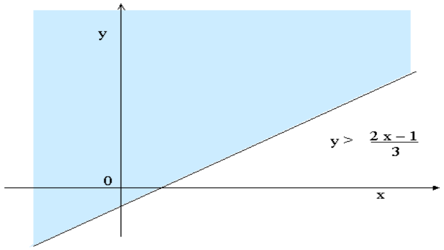
Relazioni.

$$P \times F = \{(p,f) \,/\, p \in P \wedge f \in F\}.$$

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{oppure} \qquad 2x - 3y \leq 1$$

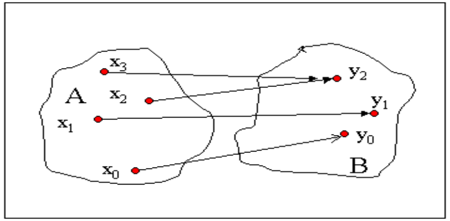
$$S = \{(x,y) \,/\, x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + y^2 = 4\};$$





$$T = \{(x, y) \,/\, 2x - 3y \leq 1\}$$

In generale una relazione tra due insiemi A e B è un qualunque sottoinsieme del loro prodotto cartesiano AxB.



Funzioni.

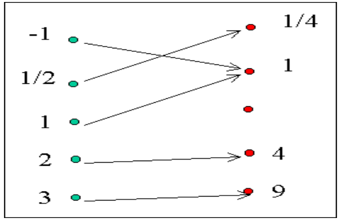
Una funzione consiste di un insieme D detto il dominio della funzione ed *una legge di corrispondenza* che associa ad ogni elemento di D uno ed un solo elemento di un secondo insieme C, detto codominio della funzione.

Successioni e Serie

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^{n-k} q^k . \qquad p_k = \frac{m^k \cdot e^{-m}}{k!} . \qquad f_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k .$$

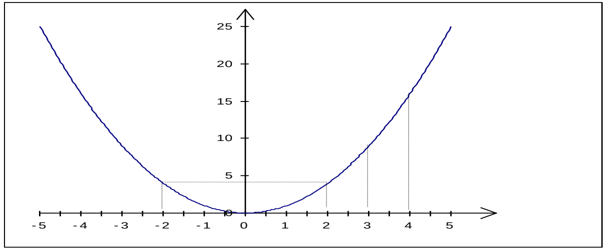
Rappresentazione di una funzione.

Funzione quadratica: $y = x^2$



dominio	2	3	5	7
codominio	4	9	25	49

$\{(2,4), (-1,1), (1,1), (3,9), (4,16)\}$



x	x^2
± 1	1
± 2	4
$\pm \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\pm \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$\pm \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
....	

grafico cartesiano è un sottoinsieme di DxC

x* $\rightarrow$ *g(x) l'***immagine*** di ***x***. S$\subseteq$D g(S) immagine di S

g(S) = C la funzione, o ***mappa*** si dice ***suriettiva*.**

$x_1 \neq x_2$, si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$ la funzione si dice ***iniettiva***.
Mappa iniettiva e suriettiva = ***biettiva* o *biunivoca*.**

Funzione reale*:* dominio e codominio sono insiemi di numeri reali.

Funzione lineare: y = mx + q (con m e q reali qualunque)
f(x) = 3x **-** 2, f(x) = 2, f(x) = **-**2x.
.
Pendenza di una retta è la tangente trigonometrica dell'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse.

Dati $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ si trova : $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Campo di definizione e Dominio

Operazioni algebriche tra funzioni

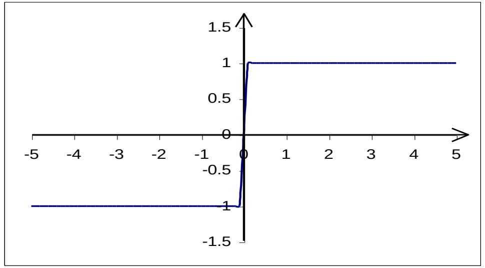
f(x) D_f g(x) D_g

f(x)+g(x); f(x)-g(x); f(x)$\times$g(x); f(x)/g(x).

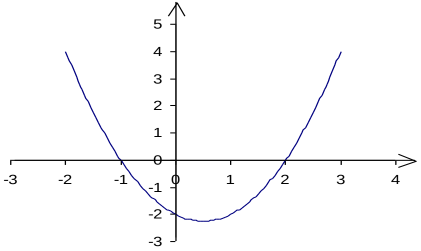
$D_f \cap D_g$ - $g(x) \neq 0$.

a) Funzione gradino:

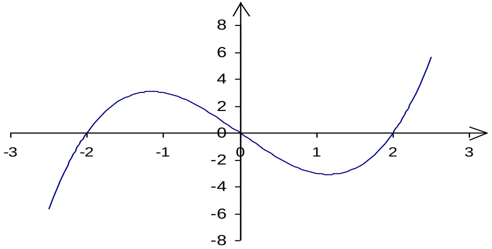
$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ per } x < 0 \\ 0 \text{ per } x = 0 \\ 1 \text{ per } x > 0 \end{cases}$$



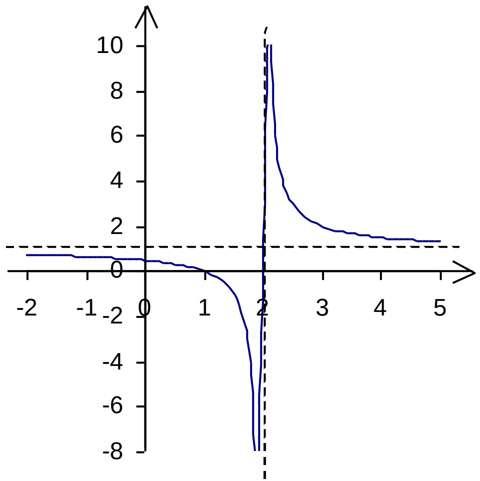
b) Funzione quadratica: $\mathbf{g(x) = x^2 - x - 2}$



c) Funzione cubica: $\mathbf{h(x) = x\,(x + 2)(x - 2)}$



d) Iperbole equilatera: $\mathbf{k(x)} = \dfrac{x-1}{x-2}$ **per** $\mathbf{x \neq 2}$



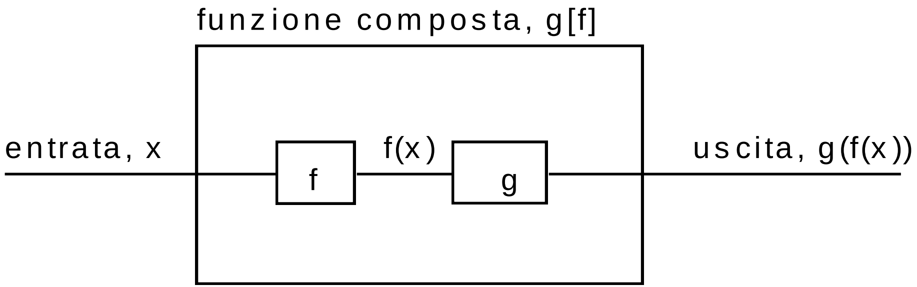
Le **funzioni polinomiali a coefficienti reali** sono formate dalla somma e dal prodotto di più funzioni lineari.

Una funzione la cui formula è espressa dal rapporto di due polinomi si dice ***funzione razionale***. Ad esempio:

$$\mathbf{W(t)} = \frac{\mathbf{t}-2}{\mathbf{t}-5}$$

t = 5 e viene detto ***polo*** della funzione dove W(t) ***diverge.***
La retta t = 5 viene detta ***asintoto verticale***.

Funzioni composte.



La funzione g[f] ottenuta dalla successiva applicazione di f e g nell'ordine viene detta la ***funzione composta* g di f.**

Funzione identità e funzione inversa

Se f(x) = x si dice ***funzione identità*** $f^{-1} = \{(y,x) \,/\, (x,y) \in f\}$ ***funzione inversa***

La funzione composta $f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$ oppure $f[f^{-1}(y)] = y$ è un’identità.

y = 3x + 2. è una funzione biunivoca perché $x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1)$.

$$x = \frac{y-2}{3} \qquad f(x) = \frac{x-2}{3}$$

Una funzione f Si dice ***crescente*** sull'insieme D se comunque presi due punti *a* e *b* con $a < b$ si ha che $f(a) < f(b)$. Una funzione si dice ***decrescente*** sull'insieme D se per ogni coppia di punti *a* e *b* con $a < b$ si ha che $f(a) > f(b)$.

Funzioni crescenti e decrescenti si dicono ***monotone***.
Se una funzione f è monotona su un insieme D, essa è biunivoca in D.

N.B.: si può dimostrare che il grafico di una funzione e della sua inversa sono immagini simmetriche rispetto all'asse $y = x$.

COSTI E RICAVI

Il profitto di una attività industriale è dato dalla differenza tra ***costi*** e ***ricavi***:

$$\mathbf{P(x) = R(x) - C(x)}$$

I ricavi sono dati da:

$$R(q) = p*q$$

dove ***p*** **è il prezzo unitario** di ciascun articolo e **q la quantità venduta**.

Costi fissi (affitto dei locali, assicurazioni) e **costi variabili** (materie prime, lavoro).
Lavoro a sua volta comprende la produzione, la rifinitura e la spedizione.

Funzione costi funzione lineare della quantità di prodotto

$$C(q) = aq + c_0.$$

Il coefficiente ***a*** rappresenta il costo globale per unità di prodotto e c_0 i costi fissi.

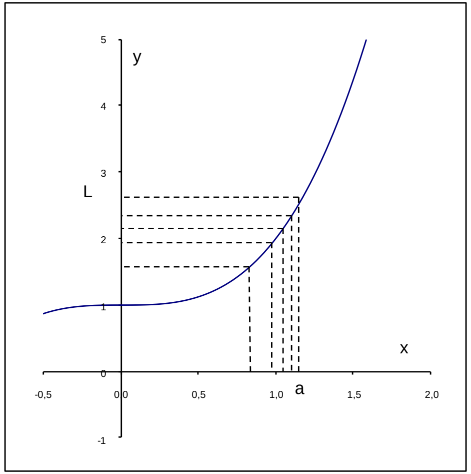
spese di pubblicità e **rappresentanza** che vanno trattate separatamente.

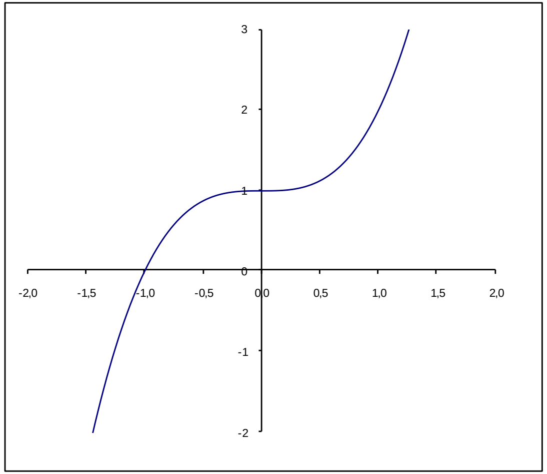
Il concetto di limite.

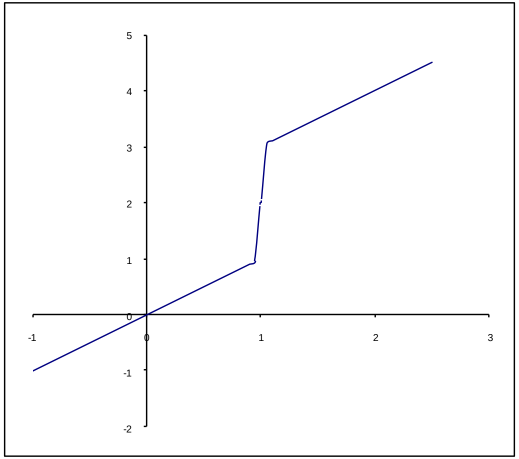
"*Data una funzione f ed un numero reale a, a quale numero si avvicina f(x) quando x si avvicina ad a?*"

$f_1(x) = x^3 + 1$ $\qquad\qquad$ $f_1(0) = 1.$

La risposta più ovvia sarebbe che si avvicina al valore della funzione in *a*.





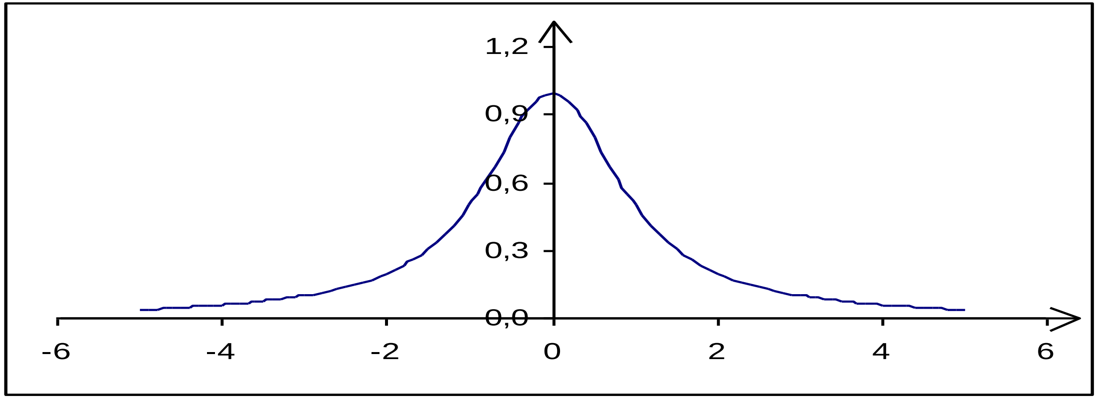


Ma questo non è sempre vero. Consideriamo la funzione $f_2(x)$:

$$f_2(x) = \begin{cases} x & per \quad x < 1 \\ 2 & per \quad x = 1 \\ x+2 & per \quad x > 1 \end{cases}$$

a) per f_2 dobbiamo esaminare separatamente l'avvicinarsi di x ad a da destra e da sinistra, mentre per f_1 questo non ha importanza;
b) si vede che $f_2(1)$ è diverso da 1 e da 3, cioè f_2 non si avvicina al valore che essa assume in 1, come invece avviene per f_1.

$f_5(x) = \frac{1}{x^2+1}$ diminuisce sempre più con l'aumentare di x e si avvicina a 0 sia per valori positivi che negativi.



Quando una funzione f si avvicina ad L se x si avvicina ad a si dice che "il limite di f(x) per *x* tendente ad *a* è L" e si scrive:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Dobbiamo distinguere il caso in cui *x* si avvicina ad *a* da **destra** o da **sinistra** e scriveremo:

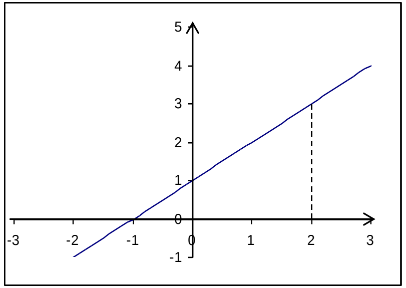
$\lim_{x\to a^-} f(x)$ = L se f(x) tende ad L quando *x* tende ad *a* da sinistra

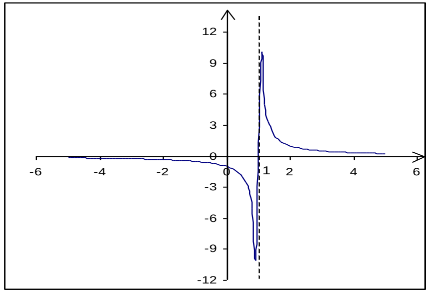
$\lim_{x\to a^+} f(x)$ = L se f(x) tende ad L quando *x* tende ad *a* da destra.

E' facile vedere che: $\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = 1$ $\lim_{x\to 1^-} f_2(x) = 1$ $\lim_{x\to 1^+} f_2(x) = 3$ $\lim_{x\to 2^\pm} f_3(x) = 4$

Ripensiamo al concetto di *intorno* $I_s(a) = \{x/|x-a| < s\} = \{x/a-s < x < a+s\}$

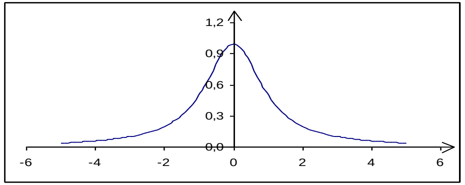
$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ (definita per $x \neq 2$) quando x si avvicina a 2 si avvicina a 4.





$f_4(x) = \frac{1}{x-1}$ definita per $x \neq 1$ quando x si avvicina a 1diventa sempre più grande.

$f_5(x) = \frac{1}{x^2+1}$ diminuisce sempre più con l'aumentare di x e si avvicina a 0 sia per valori positivi che negativi.



Quando una funzione f si avvicina ad L se x si avvicina ad a si dice che "il limite di f(x) per *x* tendente ad *a* è L" e scrive:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Dobbiamo distinguere il caso in cui *x* si avvicina ad *a* da **destra** o da **sinistra** e scriveremo:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se f(x) tende ad L quando *x* tende ad *a* da sinistra

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se f(x) tende ad L quando *x* tende ad *a* da destra.

E' facile vedere che: $\lim_{x \to 0^-} f_1(x) = 1$ $\lim_{x \to 1^-} f_2(x) = 1$ $\lim_{x \to 1^+} f_2(x) = 3$ $\lim_{x \to 2^\pm} f_3(x) = 4$

Ripensiamo al concetto di *intorno* $I_s(a) = \{x / |x-a| < s\} = \{x / a-s < x < a+s\}$

Definizione di Limite

Se *f* è una funzione **definita in un intervallo aperto** di cui ***a* è un punto interno** (ma nel quale f non è necessariamente definita), diremo che ***f(x)* ha per limite L** quando *x* tende ad *a* se per ogni intorno $I_r(L)$ possiamo trovare un corrispondente intorno $I_s(a)$ tale che **se** $\mathbf{x \in I_s(a)}$ (escluso eventualmente *a stesso*) allora $\mathbf{f(x) \in I_r}$.

Limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali.

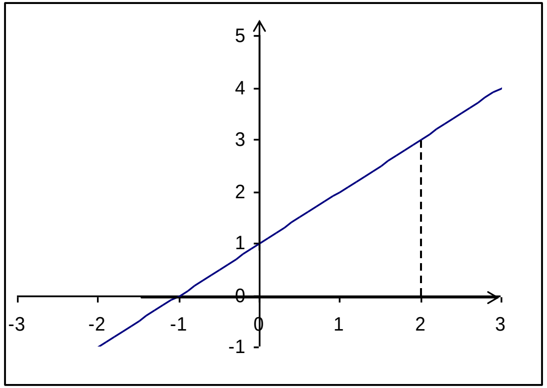
Continuità

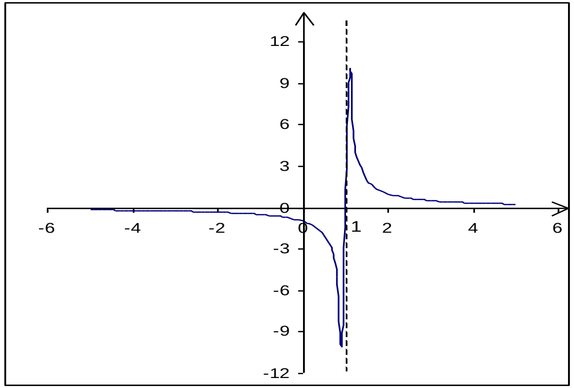
Una funzione si dice ***continua*** per x = a se $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

E' importante studiare i casi in cui f(x) **non** è continua. E cioè i casi di **discontinuità.**

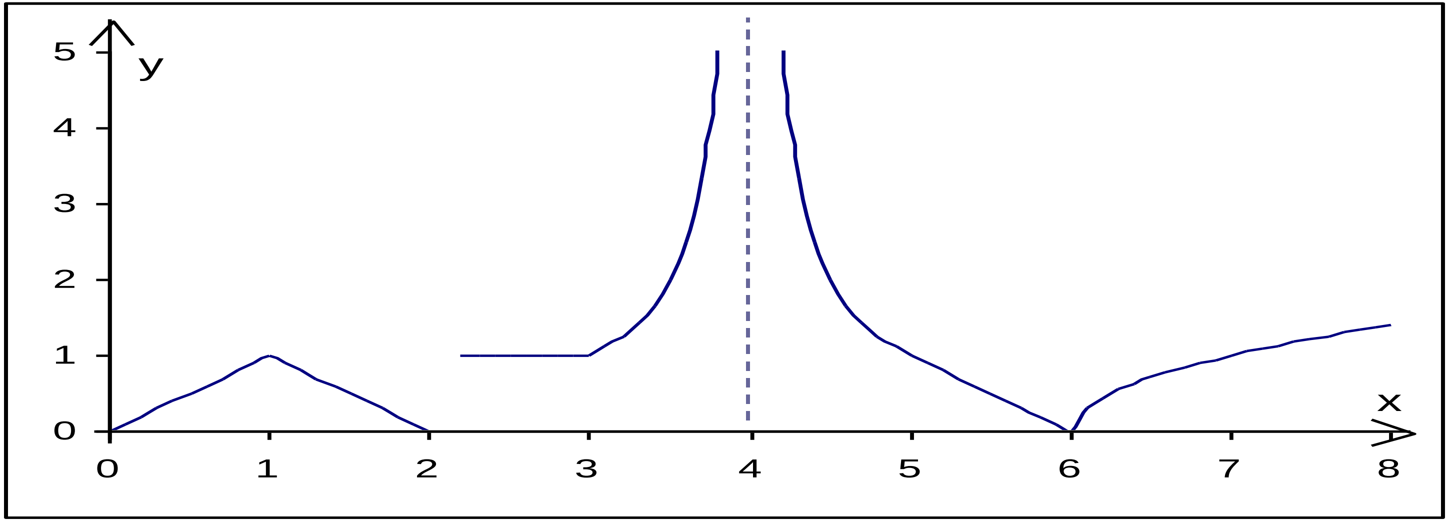
Puntidi discontinuità

$f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (definita per x≠2) quando x si avvicina a 2 si avvicina a 4.





$f_4(x) = \frac{1}{x-1}$ definita per $x \neq 1$ quando x si avvicina a 1diventa sempre più grande.


y
x
0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Il salario di un rappresentante

Esaminiamo ora il caso del salario di un rappresentante di prodotti farmaceutici.

Esso è composto di un valore base (diciamo 750 Euro mensili) più una percentuale sulle vendite

di ciascun prodotto (50 cents/pezzo) nella zona di sua pertinenza.

Se però supera il numero di 500 pezzi venduti in un mese egli riceve un premio di 100 Euro e la

sua percentuale viene portata a 75 cents.

$$s(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}q + 750 \quad per \quad q < 500 \\ \\ \dfrac{3}{4}q + 850 \quad per \quad q > 500 \end{cases}$$

Teoremi sui limiti

La teoria dei limiti poggia su alcuni teoremi che si possono enunciare facilmente:

Teorema sulla unicità del limite

Teorema sulla perrmanenza del segno

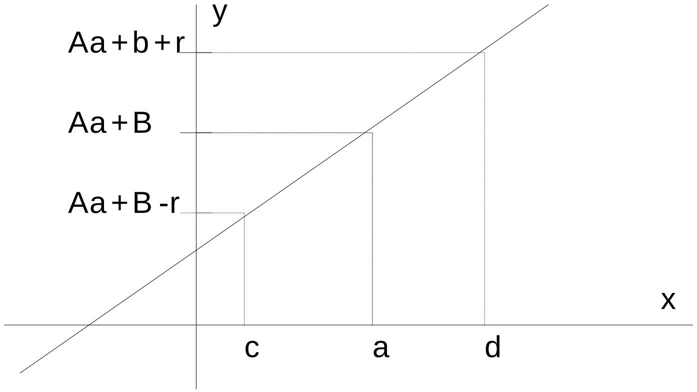
Teorema del confronto

Di questi teoremi daremo una precisa dimostrazione **basata sul concetto di intorno**

CONTINUITA' DI UNA FUNZIONE LINEARE

Teorema. Una funzione f del tipo f(x) = Ax + B dove A e B sono numeri reali, è continua sull'insieme di tutti i numeri reali.

Dimostrazione. Se A = 0 allora f(x) = B e si dimostra facilmente che = B.
Infatti fissato $I_r(B)$ possiamo scegliere $I_s(a)$ prendendo per s un valore positivo qualunque. Se A = 0 ed a è un numero reale, lo è anche Aa + B per cui f è definita per x = a.



Per dimostrare che $\lim_{x \to a} f(x)$ = Aa + B, fissato I_r(Aa + B) si ha:

Ac + B = (Aa + B) - r

Ac = Aa - r

c = a - r/A

Ad + B = (Aa + B) + r

Ad = Aa + r

d = a + r/A

ed ora se A > 0 prendiamo s r/A, se A < 0 prendiamo s -r/A.

Teorema fondamentale sul limite.

Se quando *x* tende ad *a* la funzione f tende ad A e g tende a B, sembra ragionevole pensare che la funzione f + g tenda ad A + B per x tendente ad a. Questa affermazione fa parte di un teorema molto importante:

(Teorema fondamentale sul limite). Supponiamo che

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ e $\lim_{x \to a} g(x) = B$, allora avremo che:

a) $\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] = A + B$

b) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$

c) $\lim_{x \to a} [f(x)-g(x)] = A - B$

d) se $B \neq 0$ $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = A/B$

Ometteremo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Limiti di una funzione razionale.

1) Si dimostra facilmente che

$$1)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad\qquad 2)\quad \lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{1}{x}=\pm\infty$$

Infatti per il primo, fissato un numero r > 0 piccolo a piacere potremo trovare un numero M > 1/r in modo che per ogni x > M si abbia f(x) < r . Nel secondo caso facciamo tendere x a 0+, per cui fissato un numero comunque grande M potremo trovare un intorno destro di 0, di ampiezza s < 1/M in modo che per ogni x < s si abbia f(x) > M.

2) Come conseguenza dell'esempio precedente possiamo calcolare il limite per x tendente all'infinito di una funzione razionale

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

. Basta dividere il numeratore e il denominatore per la potenza massima della x e ricordare le 1) e 2).

A seconda dei valori di m ed n si trovano tre possibili situazioni che danno luogo a risultati diversi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}= \begin{cases} 0 \; se \; n<m \\ \dfrac{a_n}{b_n} \; se \; n=m \\ \infty \; se \; n>m \end{cases}$$

Nel caso in cui x tende a -∞ otteniamo per *n*> *m* due possibili risultati: + ∞ se *n-m* è pari, e - ∞ se *n-m* è dispari.

Infiniti e Infinitesimi

Definizione. Sia f(x) una funzione definita in un intorno del punto a (escluso alpiù il punto a stesso). Se risulta $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ si dice che f(x) è un ***infinitesimo*** per x tendente ad a. In breve infinitesimo è una funzione che ha per limite 0.

Sia g(x) un altro infinitesimo per x tendente ad a; in taluni problemi è utile fare un confronto tra la rapidità con cui f(x) e g(x) tendono a zero.

A tale scopo si considera il $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$. Se tale limite è finito e diverso da 0 si dice che i due infinitesimi sono dello *stesso ordine*; se uguale a 0 si dice g(x) è un infinitesimo di ***ordine superiore*** rispetto a f(x); se infine è uguale ad infinito si dice che g(x) è un infinitesimo di ***ordine inferiore*** rispetto a f(x).

Definizione. Date più funzioni f(x), g(x), h(x), ... tutte infinitesime per $x\to a$, scegliamone una, ad es. f(x), che chiamiamo ***infinitesimo principale***. Se poi per un valore $n > 0$ i due infinitesimi g(x) e $f^n(x)$ sono dello stesso ordine, si dice che g(x) è un **infinitesimo di ordine *n*** rispetto all'infinitesimo principale f(x).

Di solito se *a* è finito si sceglie come infinitesimo principale la funzione $x - a$, se *a* è infinito si prende 1/x.

Definizione. Sia f(x) definita in un intorno del punto a (escluso al più il punto a stesso). Se risulta che $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ la funzione f(x) si dice un ***infinito*** per *x* tendente ad *a*.

Si chiama perciò infinito una quantità che abbia come limite ∞.

Due infiniti f(x) e g(x) si possono confrontare con un criterio analogo a quello seguito per gli infinitesimi. A seconda che risulti $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$ uguale ad L, finito, infinito oppure zero, si dirà che i due infiniti sono dello stesso ordine, che g(x) è un infinito di ordine inferiore o superiore rispetto **all'infinito principale** f(x).

Definizione. Se per un certo $n > 0$ le due funzioni $g(x)$ e $f^n(x)$ risultano infiniti dello stesso ordine, si dice che $g(x)$ è un infinito di ordine n rispetto all'infinito principale $f(x)$.

Definizione. Se $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f^n(x)}$ non esiste nè finito nè infinito, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili.

Di solito se a è finito si assume come infinito principale la funzione $\frac{1}{x-a}$, se a è infinito si prende semplicemente x.

Quantità Economica di Riordino.

Una farmacia ha un magazzino di dimensioni finite e deve quindi limitare la quantità che deve tenere a portata di mano di ogni prodotto anche in modo da avere la certezza di vendere la merce prima dei limiti di scadenza.
Bisogna quindi determinare quanto costa *annualmente* ordinare, acquistare e tenere in magazzino un prodotto, e di conseguenza la ***quantità di riordino*** del prodotto stesso.
Schematicamente:

C_T = (numero di ordini)(costo di ogni ordine) +
+ (quantità media in magazzino) (valore del prodotto)(costo di immobilizzo) +
+ (domanda annuale)(prezzo unitario di acquisto)
Sia:
D = numero di pezzi venduto annualmente; Co = costo di un ordine;
C_m = costo di tenuta in magazzino (percentuale del valore medio dell'inventario);
p = prezzo di acquisto; q = quantità di riordino.

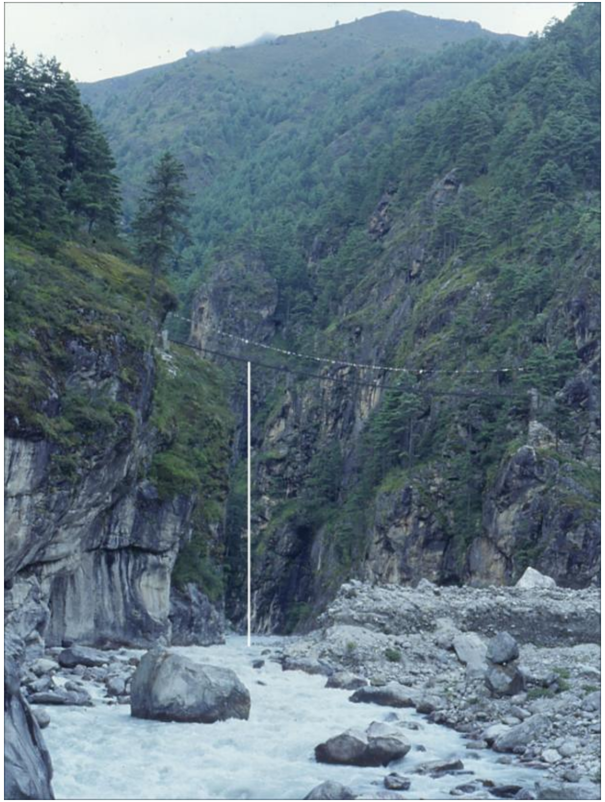
Il costo totale dell'inventario può essere espresso come una funzione della quantità di riordino q:

$$C_T = f(q) = \frac{D}{q}C_0 + \frac{q}{2}C_m + pD$$

Domanda e Ricavo
La domanda *q* di un prodotto dipende dal prezzo *p* secondo la legge: *q = a-b p.* Di conseguenza il ricavo che si ottiene dalla vendita di un prodotto $R(p) = p\,q = a\,p - b\,p^2$. A quale prezzo ottengo il massimo ricavo?

Velocità istantanea.

Se il ponte di Namche Bazar è alto 18 metri sul fiume Dudh Koshi, in un sistema di riferimento con origine sulla superficie dell'acqua e direzione verso l'alto, la quota di un oggetto lasciato cadere liberamente dalla sommità del ponte, dopo t secondi sarà:



$s(t) = 18 - 5t^2$.

Caduta di un grave nel vuoto.

Definizione. Lo *spostamento* subito da un corpo in caduta libera nel periodo tra gli istanti t_1 e t_2 ($t_1 < t_2$) sarà:

$$s_{t_2} - s_{t_1}$$

La velocità mediaperciò: $V_m = \dfrac{s_{t_2} - s_{t_1}}{t_2 - t_1}$

Definizione. Sia s*(t)* la posizione di un oggetto all'istante *t*. La sua *velocità istantanea* al tempo t_0 sarà: $\lim_{h \to 0} \dfrac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$

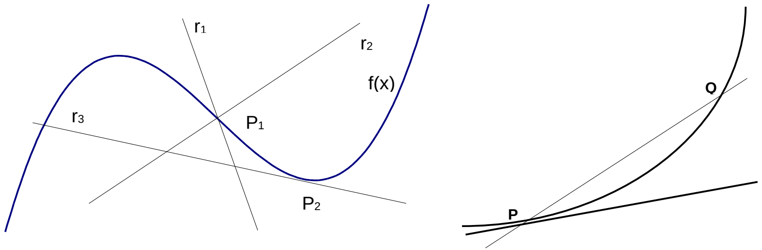
Dove h è un intervallo di tempo infinitesimo

Tangente ad una curva.

E' facile tracciare la tangente ad una circonferenza, basta portare la perpendicolare al raggio passante per un punto. **E se la curva non è una circonferenza**?

Cerchiamo quindi di **trovare una definizione** operativa **di tangente ad una curva**.

Sia *l* una data curva e sia *P* un punto su *l*; ogni retta passante per *P* è individuata dalla sua pendenza. Perciò cerchiamo di trovare una definizione ragionevole della pendenza della tangente a *l* in P. Sia *s(P,Q)* la pendenza della retta determinata dai punti *P* e *Q*, dove *P* è il punto assegnato, e *Q* è un altro punto qualunque della curva.



Tangenti e secanti ad una curva piana.

Dalla figura si vede che, se *Q* viene preso sempre più vicino a *P*, la retta corrispondente si avvicina ad una posizione che sembra ragionevole pensare quella della retta tangente. La pendenza *s(P,Q)* dovrebbe quindi assumere valori che si avvicinano a quelli della pendenza della retta tangente. Di conseguenza:

Definizione 1.- Definiamo come **pendenza della tangente** in *P* alla curva *l* il limite della quantità *s(P,Q)* quando *Q* tende a *P*, semprechè questo limite esista.

Ricordiamo che la pendenza del segmento congiungente due punti (x_1,y_1) e (x_2,y_2) è data da

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Supponiamo poi che la curva *l* sia il grafico della funzione $y = f(x)$ dove *f* è una funzione continua. Sia *P* il punto della curva la cui ascissa è *x* e *Q* il punto di ascissa *x+h*; allora *P* è il punto *(x, f(x))* e *Q* è il punto *(x+h,f(x+h))*.

Pendenza del segmento PQ sarà: $s(P,Q) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Dire che *Q* si avvicina a *P* è come dire che *h* tende a *0*, per cui:

Definizione 2.- Si definisce come ***pendenza*** della tangente alla curva l di equazione y = f(x) nel punto *P* il $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

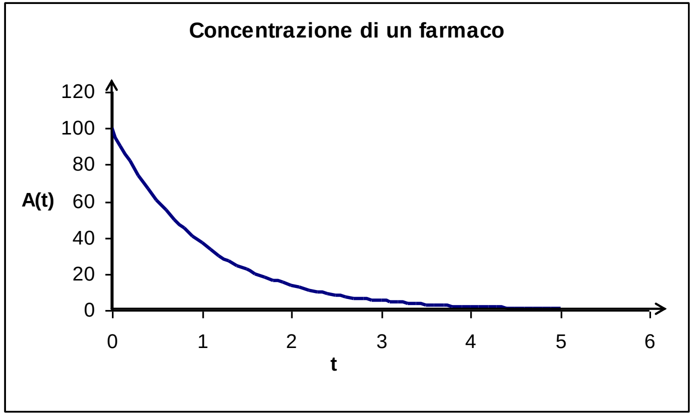
Farmacocinetica.

La c**oncentrazione** *A(t)* di un farmaco nel sangue di un paziente diminuisce con il tempo secondo un meccanismo che dipende dalla natura del farmaco e dal metabolismo del paziente. Nello studio di un processo terapeutico è importante conoscere quale è il tasso di decremento della concentrazione dopo l'assunzione del farmaco. Se quindi all'istante $t + h$ la concentrazione è $A(t + h)$ il tasso di decremento medio nell'intervallo che va da t a $t+h$ sarà dato da:

$$\frac{A(t+h)-A(t)}{h} \qquad \text{mg/cm}^3$$

Il ***tasso istantaneo* di decremento** della concentrazione al tempo t darà dato da:

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{h}.$$



Concentrazione ematica di un farmaco.

Definizione di derivata di una funzione.

I concetti che abbiamo esaminato, velocità di un grave, pendenza di una curva e tasso di decremento della concentrazione di un farmaco, apparentemente non hanno alcunchè di comune, ma in tutti e tre i casi arriviamo alla stessa formula:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Dfinizione. Data una funzione f ed un punto x del suo dominio, si dice ***derivata* di f nel punto x** il limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ se esiste e lo si indica con *f'(x).*

La quantità *h* prende il nome di ***incremento della variabile***, mentre *f(x + h) - f(x)* prende il nome **di *incremento della funzione***; il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ viene detto perciò ***rapporto incrementale.***

Calcoliamo ad esempio la derivata della funzione $f(x)=\frac{1}{x^2}$ secondo la definizione appena data:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x^2-2hx-h^2}{h(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2}=-\frac{2}{x^3}$$

Calcoliamo ora la derivata di *f(x)* = $\sqrt{x}$ *:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nello stesso modo si possono calcolare le derivate delle funzioni $f_0(x) = b$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, e $f_3(x) = mx + b$ per le quali si trova: f'(x) = 0, f'(x)=1, f'(x) = 2x, f'(x) = m.

Funzioni differenziabili e non differenziabili.

Alcune funzioni ammettono derivata in alcuni punti e non in altri. Ad esempio la funzione f(x) = |x| ammette derivata per x = 5 e non per x = 0.

Definizione 1. Una funzione si dice ***differenziabile*** in x se esiste la sua derivata f'(x). Il procedimento che porta al calcolo della derivata si dice *differenziazione*.

Ricaviamo una formula che ci sarà utilissima in seguito facilitando la dimostrazione di molti teoremi.

Teorema. Se *f* è una funzione differenziabile nel punto *a*, allora

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + hf^*(h)$$

dove f*(h) è una funzione infinitesima per *h* tendente a zero: $\lim_{h\to 0} f^*(h) = 0$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema parte dalla definizione di derivata di *f(x)* nel punto *a*:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0$$

Perciò se poniamo $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = f^*(h)$ abbiamo $\lim_{h\to 0} f^*(h) = 0$

e quindi dalla relazione precedente: f(a + h) = f(a) + hf'(a) + hf*(h) la formula cercata.

Derivata della somma e della differenza

Teorema. Se *f* e *g* sono ambedue differenziabili in a, allora *f+g* è anche essa differenziabile in *a* e la sua derivata è *f'(a) + g'(a);* analogamente *f-g* è differenziabile in *a* e la sua derivata è *f'(a) - g'(a).*

Dimostrazione. Sia *s(x) = f(x) + g(x),* dobbiamo dimostrare che *s'(a)=f'(a) + g'(a).*
Per definizione di derivata:

$$s'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \lim\frac{f(a+h)+g(a+h)-[f(a)+g(a)]}{h} =$$

poichè f(x) e g(x) sono per ipotesi differenziabili, vale la formula precedente e perciò:

$$f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a) = f(a) + h\cdot f'(a) + h\cdot f^*(h) + g(a) + h\cdot g'(a) + h\cdot g^*(h) - f(a) - g(a) =$$

$$= \lim_{x\to a}[f'(a) + f^*(h) + g'(a) + g^*(h)] = f'(a) + g'(a).$$

La dimostrazione per la sottrazione è analoga.

Derivata del prodotto

Il prossimo passo è quello di prendere in esame la derivata del prodotto di due funzioni p(x) = f(x)·g(x). Da quanto visto sopra si potrebbe pensare che p'(x) = f'(x)·g'(x), ma questo non è vero. La formula esatta della derivata del prodotto ce la dà il seguente Teorema:

Teorema. Se *f* e *g* sono due funzioni derivabili in *a*, allora *f·g* è anch'essa differenziabile in *a* e si ha:

$$p'(a) = f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a).$$

Dimostrazione. Applichiamo la definizione di derivata a *p(x)*:

$$p'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{p(a+h)-p(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a)}{h}$$

aggiungendo e togliendo *f(a+h) g(a)* si ottiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a)+f(a+h)\cdot g(a)-f(a+h)\cdot g(a)}{h}$$

da cui si ricava: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot[g(a+h)-g(a)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)-f(a)]\cdot g(a)}{h}$

Passando al limite rimane $f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a)$.

Corollario. Se *g(x)* è differenziabile in *a* e *c* è un numero reale, allora *c·g(x)* è differenziabile in *a* e:

$$[c\cdot g(x)]' = c\cdot g'(x) \qquad \text{per } x = a.$$

Per dimostrarlo basta applicare la formula precedente e ricordare che la derivata di una costante è uguale a zero.

Derivata di un polinomio.

Applichiamo ora le formule viste in precedenza per ottenere una semplice regola per differenziare i polinomi. Riassumiamo alcuni risultati già ottenuti:

$f_1(x) = x$	$f_1'(x) = 1,$	$f_2(x) = x^2$	$f_2'(x) = 2x$
$f_3(x) = x^3 = x \cdot x^2$	$f_3'(x) = 3x^2$	$f_4(x) = x^4 = x \cdot x^3$	$f'(x) = 4\,x^3$

Guardando queste espressioni per le derivate, possiamo dedurre che la derivata di $f_5(x) = x^5$ sarà $f_5'(x) = 5 \cdot x^4$ e di conseguenza se $f_n(x) = x^n$ avremo $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Questa supposizione è giusta e ci viene confermata dal seguente teorema:

Teorema. Se $f_n(x) = x^n$ con n intero positivo, allora si ha $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Dimostriamo questo teorema per **induzione completa**. Notiamo innanzitutto che il teorema non enuncia una proposizione sola, ma infinite, una per ogni valore di n.

Per $n=1$ avremo la proposizione S_1 che ci dice come $f_1'(x) = 1$, per $n = 2$ la proposizione S_2 e cioè $f_2'(x) = 2x$, e poi le proposizioni S_3, S_4, S_5, e così via.

Questo si presta alla *dimostrazione per induzione*, che procede in due passi: prima si dimostra che S_1 è vera (cosa che abbiamo già fatto), poi si dimostra che se S_k è vera è vera anche S_{k+1}.

Perciò supponiamo che S_k sia vera e quindi se $f_k(x) = x^k$ allora $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$, e dimostriamo che S_{k+1} è vera, cioè $f_{k+1}'(x) = (k+1)x^k$.

Per fare questo basta pensare che: $f_{k+1}(x) = x \cdot x^k = x \cdot f_k(x)$.

In base alla formula di derivazione del prodotto otteniamo:

$$f_{k+1}'(x) = f_k(x) + x \cdot f_k'(x) = x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (k+1) \cdot x^k.$$

Perciò, poichè la S_1 è vera, è vera anche la S_2 e quindi la S_3 e così via fino alla S_n che quindi resta dimostrata.

Calcoliamo la derivata della funzione $[f(x)]^2$ espressa in termini di $f(x)$ e $f'(x)$.

Possiamo scrivere $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ e per la regola di derivazione del prodotto:

$$[f^2(x)]' = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x).$$

Analogamente possiamo calcolare:

$$[f^3(x)]' = [f(x) \cdot f^2T(x)]' = f'(x) \cdot f^2(x) + f(x) \cdot 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x).$$

Per induzione completa possiamo quindi dimostrare anche che:

$[f^n(x)]' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$ per n intero positivo.

Continuità di funzioni differenziabili.

Abbiamo detto che una funzione *f(x)* è continua nel punto *a* se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, il che equivale a dire che $\lim_{x\to a} f(a+h) = f(a)$ (basta porre $x = a + h$). Ne segue che:

Teorema. Se *f* è differenziabile in *a*, allora essa è continua in *a*.

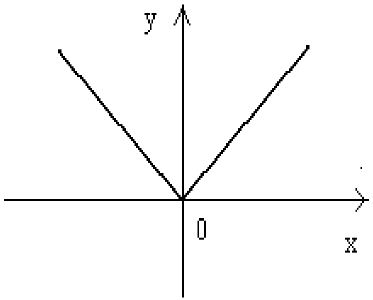
Dimostrazione. Poichè *f* è differenziabile, possiamo scrivere:

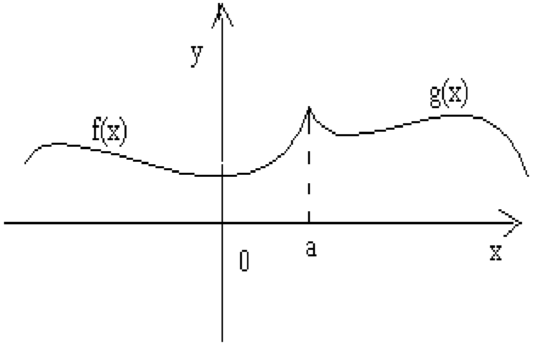
$$f(a + h) = f(a) + h\cdot f'(a) + h\cdot f^*(h)$$

da cui risulta

$$\lim_{x\to a} f(a + h) = \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} h\cdot f'(a) + \lim_{x\to a} h\cdot f^*(h) = f(a).$$

N.B. Questo teorema dice che una funzione differenziabile in *a* è continua ma non l'inverso. Ad esempio $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma non differenziabile. Più in generale potremmo avere una funzione *h(x)* ottenuta una vicino all'altra due funzioni *f(x) e g(x)*.





Punti angolosi..

Poniamo : $h(x) = \begin{cases} f(x) \; per \; x \le a \\ g(x) \; per \; x > a \end{cases}$

Perchè i due pezzi si congiungano con continuità dovrà essere $f(a) = g(a)$, ma in a avremo uno spigolo a meno che le pendenze delle due rette non siano uguali.

Teorema Siano f e g differenziabili in a, e sia:

$$h(x) = \begin{cases} f(x)\ per\ x \leq a \\ g(x)\ per\ x > a \end{cases}$$

Allora:

(1) $h(x)$ è continua se $f(a) = g(a)$,

(2) $h(x)$ è differenziabile se oltre ad essere $f(a) = g(a)$ è anche $f'(a) = g'(a)$.

Derivata del quoziente.

Dimostriamo la formula di derivazione del quoziente di due funzioni in due passi successivi. Il primo è costituito dal seguente:

Teorema. Sia g differenziabile in a e sia $r(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

Allora se $g(a) \neq 0$, $r(x)$ è differenziabile in a e si ha: $r'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.

Dimostrazione. Dalla definizione di derivata si ottiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h\cdot g(a+h)\cdot g(a)}=\lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a)-h\cdot g'(a)-h\cdot g^*(h)}{h\cdot g(a+h)\cdot g(a)}= -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Come applicazione di questo teorema possiamo estendere la formula di derivazione di $f_n(x) = x^n$ che avevamo dato per n positivo, al caso in cui n sia negativo.

Teorema1. Se $f_n(x) = x^n$ dove n è intero (positivo o negativo), allora $f_n'(x) = n\, x^{n-1}$ (se $n < 0$ dovrà essere $x \neq 0$).

Dimostrazione. Se $n < 0$ poniamo $p = -n$ e avremo $f_n(x) = \dfrac{1}{x^p}$ con $p > 0$. Applichiamo la formula già trovata per la derivata di $\dfrac{1}{g(x)}$ e otteniamo $f_n'(x) = -p\,\dfrac{x^{p-1}}{x^{2p}} = -p\cdot x^{-p-1} = n\cdot x^{n-1}$.

Teorema2. Siano f e g due funzioni differenziabili in a e sia inoltre $g(a) \neq 0$.

Se $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ allora $Q(x)$ è differenziabile in a e la sua derivata sarà

$$Q'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Dimostrazione. Poniamo $Q(x) = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ e applichiamo la formula di derivazione del prodotto: $Q'(x) = f'(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}\right]$ che calcolata in a ci dà la tesi.

Derivata di una funzione composta.

Le regole che abbiamo ricavato finora ci permettono di calcolare la derivata di un polinomio, di una funzione razionale e della $\sqrt{x}$. Non possiamo dire nulla però sulla derivata della funzione:

f(x) = $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ anche se sappiamo derivare sia la $\sqrt{x}$ che la $\dfrac{x}{x^2+1}$.

La funzione *f(x)* è infatti una funzione composta e ci proponiamo pertanto di determinare la derivata di *g[f(x)]*.

Teorema. *Sia φ (x) = g[f(x)]*. Se *f* è differenziabile in *a* e se g è differenziabile in *f(a),* allora *φ* è differenziabile in *a* e si ha

$$\varphi'(a) = g'[f(a)]\cdot f'(a).$$

Dim. Per definizione di derivata *φ'(a)* = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$. Poichè per ipotesi *f* è differenziabile in *a*, per il teorema 6.1 si ha: *f(a + h) = f(a) + h·f'(a) + h·f*(h)* con $\lim\limits_{h\to 0} f^*(h) = 0$ e se poniamo *k(h) = h·f'(a) + hf*(h)* possiamo scrivere:

f(a + h) = f(a) + k(h) con $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = 0$.

Perciò $\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \dfrac{g[f(a)+k(h)]-g[f(a)]}{h} =$

e poichè per ipotesi *g* è differenziabile

g[f(a) + k] = g[f(a)] + k·g'[f(a)] + k·g*(k) dove $\lim\limits_{h\to 0} g^*(k) = 0$.

Quindi

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \frac{k\cdot g'[f(a)]+kg^*(k)}{h} = \frac{k}{h}\left\{g'\left[f(a)\right]+g^*(k)\cdot\right\}$$

ma poichè *k = h·f'(a) + h·f*(h)* e di conseguenza $\dfrac{k}{h}$ = *f'(a) + f*(h)* avremo:

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \{g'[f(a)] + g^*(k)\}\cdot\{f'(a) + f^*(h)\}.$$

Passando al limite possiamo quindi concludere che

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\{g'[f(a)]+ g^*(k)\}\cdot\{f'(a) + f^*(h)\} = g'[f(a)]\cdot f'(a).$$

Si può dimostrare (e lo faremo in seguito) che **[sin x]'= cos x.**

Se poi $\varphi_3(x) = \text{sen}(x^2 - 1)$ allora $\varphi_3'(x) = \cos(x^2 - 1)\cdot 2x$.

Calcoliamo ora la derivata di cos x:
$[\cos x]' = [\sin(\pi/2 - x)]' = \cos(\pi/2 - x)\cdot(-1) = -\text{sen } x$.

Per quanto riguarda la tangente:

$$[\tan x]' = \left(\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Un'ulteriore applicazione la possiamo fare per determinare la derivata di potenze razionali, cioè della funzione $f(x) = x^{p/q}$ con *p* e *q* interi e diversi da zero.

Th. 11.1. Se $f(x) = x^r$ dove *r* è un numero razionale, allora $f'(x) = r\cdot x^{r-1}$ (se *r-1* è negativo sia $x \neq 0$).

Dim. Se r è un numero razionale avremo r = p/q con p e q interi. Possiamo quindi scrivere $f^q(x) = x^p$ e differenziare i due membri ottenendo:

$q\cdot f^{q-1}(x)\cdot f'(x) = p\cdot x^{p-1}$. Ricordando la definizione di f(x) si ricava: $q \cdot x^{\frac{p}{q}(p-1)} f'(x) = p \cdot x^{p-1}$ da cui ancora:

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = r \cdot x^{r-1}.$$

Derivata di una funzione inversa.

Sia *g(x)* una certa funzione crescente, ed *f(x)* la sua inversa.
I grafici di $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ come abbiamo già notato sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$.
Se P e P' sono due punti corrispondenti sulle due curve e se P=(a,b) allora P'=(b,a). E' evidente che y = f(x) avrà una tangente in P se y = g(x) ha una tangente in P'.
In termini di derivate, *f* avrà una derivata in *a* se *g* ha derivata in *b*, tranne il caso in cui $g'(b) = 0$ e cioè la tangente in P' è orizzontale per cui la tangente in P sarebbe verticale e quindi $f'(a)$ non esisterebbe.

Teorema 1. Se *f* è la funzione inversa di *g*, allora $f'(a)$ esiste se esiste $g'[f(a)]$ ed è diversa da 0. Questo è un risultato abbastanza intuitivo che non dimostreremo.
Il prossimo passo è quello di trovare una formula per $f'(a)$ in termini di $g'(b)$.

Teorema 2. Sia *f* la funzione inversa di *g*. Se *g* è differenziabile in $f(a)$ e $g'[f(a)] \neq 0$ allora *f* è differenziabile in *a* e : f'(a) = 1/g'[f(a)]

Dim. Ricordiamo che $f = g^{-1}$ e quindi $g[f(x)] = x$ per cui differenziando entrambi i membri si ha $g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1$ da cuisi ricava: $f'(x) = \dfrac{1}{g'[f(x)]}$.
Useremo ripetutamente questa formula in seguito per calcolare le derivate delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche e di log *x*.

Esempi: Vediamo una funzione di cui conosciamo già la derivata $y = \sqrt{x}$ **che è la inversa di** $x = y^2$**. Poichè la funzione** $y = x^2$ **è crescente nell'intervallo (0, +∞) essa ammette inversa, per cui:**

y' = $\frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **come già sapevamo.**

Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche, poichè y **= arcsin** x **è la inversa della** x**= sin** y**. La funzione** y **= sen** x **è crescente nell'intervallo (-π/2,+π/2), mentre la funzione** y**=cos** x **è decrescente nell'intervallo (0, π).**

(arcsin x**)' =** $\frac{1}{(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(arccos x**)' =** $\frac{1}{(\cos y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **; (arctg** x**)' =** $\frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

Tangente ad una curva.

Data la curva *y = f(x)* vogliamo scrivere l'equazione della retta tangente ad essa in un dato punto $(x_0, f(x_0))$. L'equazione di una retta qualunque passante per (x_0,y_0) con pendenza *m* è $y - y_0 = m(x - x_0)$. La retta che ci interessa passa per il punto $(x_0,f(x_0))$ con pendenza $f'(x_0)$.

Perciò la sua equazione è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Se per esempio vogliamo scrivere l'equazione della retta tangente alla $y = \log x$ nel punto $x = 1$ troviamo che $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$. Perciò l'equazione della retta sarà: $y = x - 1$

Approssimazione lineare.

Ecco un problema che si presenta di frequente: abbiamo bisogno di stimare il valore di una data funzione in punto *x* dove *f(x)* è difficile da calcolare. Se *f(a)* è noto ed *a* è vicino ad *x* è naturale cercare una stima di *f(x)* incominciando da *f(a)*.

Perciò dato *f(a)* cerchiamo un metodo per approssimare *f(a + h)* (dove *h* è piccolo e può essere sia positivo che negativo) con pochi calcoli. Ancora una volta useremo la famosa formula:

$$f(a + h) = f(a) + h\cdot f'(a) + h\cdot f^*(h) \quad \text{con } \lim_{h\to 0} f^*(h) = 0,$$

semprechè *f(x)* sia derivabile nel punto *x = a*. In tal caso, poichè la *f* è continua, l'approssimazione di *f(a + h)* è data da *f(a)* e dalla somma di due ulteriori termini correttivi.

Poichè $\lim_{h\to 0} f^*(h) = 0$, si può dire che il termine $h\cdot f^*(h)$ è di solito molto piccolo in confronto a $h\cdot f'(a)$, essendo infinitesimo di ordine superiore per $h \to 0$. Perciò una ovvia approssimazione per la formula precedente sarà:

$$f(a + h) = f(a) + h\cdot f'(a).$$

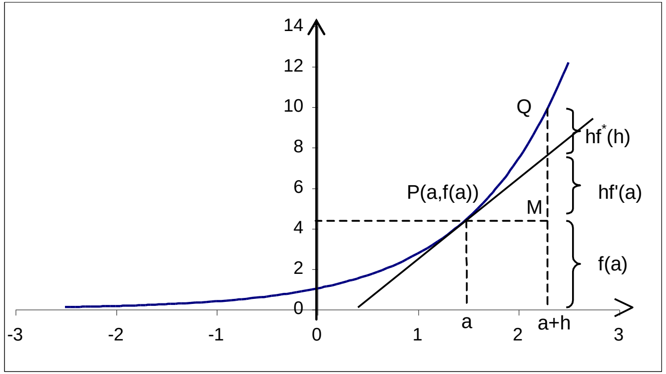


Fig. 5.8.- Approssimazione lineare.

Questo corrisponde a prendere il valore della funzione in *a + h* sulla tangente in *a* invece che sulla funzione stessa.

Differenziali.

Nella discussione precedente il termine *f'(a)·h* ha giocato un ruolo molto importante. A questa quantità viene dato di solito un nome.

Def. 15.1. Se *f* è una funzione differenziabile in *a* si dice differenziale di *f* nel punto *a* la funzione lineare $df_a = f'(a)\cdot h$.

Notiamo come df_a dipende strettamente dalla scelta del punto *a* e di *h*, e possiamo vedere nella figura sotto che $df_a(h)$ misura la variazione verticale sulla tangente tra $x = a$ ed $x = a + h$.

Di solito, invece di scrivere $df_a(h)$ si scrive semplicemente *df* ed anche *h* viene indicato con il simbolo *dx* per cui si ha: df = f'(a)dx.

Possiamo quindi rappresentare la derivata di una funzione con la scrittura : $\frac{df}{dx} = f'(x)$ che è più vaga della precedente perchè non indica il punto in cui va calcolata la derivata.

Derivate successive.

Se la derivata *f'(x)* di una funzione *f* è ancora una funzione differenziabile, la sua derivata verrà detta derivata seconda di *f(x)* e sarà indicata con *f"(x)*.

Analogamente la derivata di *f"(x)* verrà detta derivata terza di *f(x)* e sarà indicata con *f'''(x)*; così pure le derivate successive: $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$ etc.

Formule di Taylor e di Mac Laurin.

Abbiamo già visto la formula che ci permette di ottenere un valore approssimato di *f(x)* quando se ne conosca il valore in un punto *a* e *x-a* = *h* sia sufficientemente piccolo.

Nel caso già visto abbiamo usato una forma lineare, ma se avessimo usato un polinomio di grado più elevato l'approssimazione tra curva e polinomio sarebbe stata molto migliore. Data una funzione *f(x)* sorge quindi il problema di determinare un polinomio che approssimi la funzione in un intorno $I_r(a)$, con un grado di approssimazione a nostra scelta.

Questo polinomio lo possiamo trovare sotto certe condizioni e viene espresso dalla formula di Taylor.

Th. 17. 1. Sia *f(x)* una funzione continua e derivabile *n* volte in un intorno $I_r(a)$ di ampiezza *r* di un punto *a*. Detto *x* un qualsiasi altro punto dello stesso intervallo risulta (*formula di Taylor*):

$$f(x) = f(a) + (x - a)\cdot f'(a) + (x-a)^2 \cdot \frac{f''(a)}{2!} + (x-a)^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \ldots\ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n)}(\theta)}{(n+1)!}$$

dove θ è un conveniente punto interno all'intervallo *(a, x)*.

Non dimostreremo questo teorema. Notiamo che ogni termine della sommatoria è infinitesimo di ordine superiore al precedente per x tendente ad *a*, e che per $n \to \infty$ il polinomio coincide con la funzione.

Se poi l'intervallo $I_r(a)$ contiene l'origine dell'asse delle ascisse si può porre *a = 0* nella formula di Taylor, per cui si ottiene una nuova espressione (formula di Mac Laurin):

$$f(x) = f(0) + x\cdot f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + x^3 \frac{f'''(0)}{3!} + \ldots\ldots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

Il termine $R_n = (x-a)^{n+1} \dfrac{f^{(n)}(\theta)}{(n+1)!}$ **prende il nome di resto della formula di Taylor nella forma datagli da Lagrange e rappresenta l'errore che si commette prendendo al posto della funzione *f(x)* il suo sviluppo in serie. Esso, in generale non è noto, ma si può calcolare il suo massimo.**

Per un grande numero di funzioni R_n si può rendere trascurabile prendendo *n* sufficientemente grande.

Forme indeterminate. Regola di De L'Hospital.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un intorno di ampiezza r del punto a e tali che $f(a) = g(a) = 0$, mentre $g(x) \neq 0$ per tutti gli altri punti di $I_r(a)$. Perciò il quoziente $f(x)/g(x)$ è definito in tutti i punti di $I_r(a)$ tranne a stesso dove assume la forma indeterminata 0/0.

Sussiste in questo caso il teorema seguente (regola di De L'Hospital).

Th. 18. 1. Se nel punto a il quoziente $f(x)/g(x)$ assume la forma indeterminata 0/0, se in un intorno di a $g'(x) \neq 0$ ed esiste finito il limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche il limite del quoziente $f(x)/g(x)$ e i due limiti sono uguali: $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dim. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ (ponendo x-a=h e dividendo numeratore e denominatore per h e passando al limite).

Ad esempio $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

Più in generale se assumono forma indeterminata in a i quozienti

$\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f'(x)}{g'(x)}, \ldots\ldots, \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ mentre $\lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)} = L$ allora

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots\ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L$$

Ad esempio: $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{senx}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

Quanto detto vale anche se si considera il limite destro o il limite sinistro.

Esempi di Forme indeterminate

La regola di Dell'Hospital si estende anche al caso in cui f*(x)* e *g(x)* tendono all'infinito e quindi il quoziente *f(x)/g(x)* assume la forma indeterminata ∞/∞, e continua a valere anche nel caso in cui *a* sia infinito.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/\operatorname{sen}^2 x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}=0; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$

Se *f(x)* tende a 0 e *g(x)* tende all'infinito, prodotto assume la forma indeterminata 0·∞. Siccome però risulta $f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}=\dfrac{g}{1/f}$ ci si riconduce ad uno dei casi ∞/∞ o 0/0 già visti.

analogmente

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\cdot\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{x^{-\alpha-1}}=0$$

Altre forme indeterminate sono 0^∞, 1^∞, ∞^0 si ottengono dalla potenza $\varphi(x)=f(x)^{g(x)}$.

Poichè $\varphi(x)=e^{g(x)\cdot\log f(x)}$ ci si riconduce alle forme indeterminate 0·∞, ∞·0 già esaminate.

Ad esempio:

$\lim_{x\to 0} x^x=\lim_{x\to 0} e^{x\cdot\log x}$ e poichè

$\lim_{x\to 0} x\cdot\log x=\lim_{x\to 0}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=0$ allora $\lim_{x\to 0} x^x=e^0=1$

Analogamente si procede per $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$ e $\lim_{x\to 0}(\log x)^{1/x}$.

Studio di curve piane.

Data una funzione f vogliamo usare gli strumenti del calcolo per ottenere informazioni sull'andamento della curva $y = f(x)$.

Ad esempio vogliamo trovare dove la curva è crescente o decrescente, dove ci sono massimi, minimi, ecc..

Sappiamo già che cosa significa che una funzione è crescente o decrescente. La crescenza di una funzione è legata alla sua derivata:

Th. 2.1. Sia f una funzione continua su di un intervallo chiuso $[a,b]$ e differenziabile su (a,b);

1) Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ allora f è crescente su $[a,b]$;

2) Se $f'(x) < 0$ " " " decrescente " .

Dim. Per ipotesi sia $f'(x) > 0$ su (a,b) e siano x_1 e x_2 due punti di [a,b]; f sarà continua su $[x_1,x_2]$ e differenziabile su (x_1,x_2), quindi per il teorema di Lagrange:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \text{ con } x_2 < c < x_1.$$

Poichè $f'(c) >0$ e $x_2 > x_1$ $f'(c)(x_2 - x_1)> 0$ e quindi $f(x_2)>f(x_1)$. Analogamente si dimostra la 2).

Concavità e convessità.

Consideriamo la funziome f(x) definita in un intervallo [a,b] e derivabile in (a,b) quante volte sia necessario. Sia $x_0 \in (a,b)$ e proponiamoci di studiare l'andamento della funzione in un intorno di $(x_0, f(x_0))$.

A tale scopo consideriamo la tangente alla curva nel punto $(x_0, f(x_0))$, essa sarà $y = f(x_0) + (x - x_0)\cdot f'(x_0)$.

Def. 3.1. Si dice che il grafico della funzione f rivolge la concavità verso l'alto se c'è un intervallo (a,b) contenente x tale che in tutto (a,b) il grafico stia sopra la retta tangente al grafico stesso in $(x_0, f(x_0))$, tranne che nel punto di tangenza. Se in tutto (a,b) il grafico sta tutto sopra la retta tangente tranne che nel punto di tangenza, si dirà che la funzione f rivolge la concavità verso il basso.
Se comunque preso un intorno completo di x_1 il grafico sta sempre parte sopra e parte sotto la tangente diremo che x è un punto di flesso.

Consideriamo la funzione f(x) nel suo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto x_0 dove è derivabile infinite volte:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\cdot f'((x_0) + (x-x_0)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!} + (x-x_0)^2 \frac{f'''(x_0)}{3!} + \ldots\ldots + (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

e chiamiamo $\Delta(x)$ la differenza tra funzione e retta tangente in x

$$\Delta(x) = (x-x_0)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!} + (x-x_0)^2 \frac{f'''(x_0)}{3!} + \ldots\ldots + (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Dal segno della $\Delta(x)$ potremo vedere se la f(x) rivolge la concavità verso l'alto o verso il basso.
Per studiare il segno di Δ (x) basta studiare il primo termine diverso da zero perchè i successivi sono infinitesimi di ordine superiore e quindi non in grado di influire sul segno del termine precedente.

Se $f''(x_0) > 0$ la concavità sarà rivolta verso l'alto perchè $(x - x_0)^2$ non cambia segno al passaggio di x da sinistra a destra di x_0.
Se $f''(x_0) < 0$ la concavità sarà rivolta verso il basso.

Se $f'(x_0) = 0$ la tangente in x_0 è orizzontale e quindi in x_0 abbiamo un estremo che sarà un punto di massimo se la concavità è rivolta verso il basso, $f''(x_0) < 0$, o un punto di minimo se la concavità è rivolta verso l'alto, $f''(x_0) > 0$.

Se $f''(x_0) = 0$ ed $f'''(x_0) = 0$ il primo termine di $\Delta(x)$ sarà $f'''(x_0)(x - x_0)^3$ che cambia segno al passaggio di x da destra a sinistra di x_0.
Quindi non esiste un intorno di x_0 in cui la funzione stia tutta sopra o tutta sotto la retta tangente e prciò il punto x_0 è un punto di flesso.
Il flesso lo diremo crescente se $f'''(x_0) > 0$, decrescente se $f'''(x_0) < 0$.
Se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, e $f'''(x_0) \neq 0$ avremo un flesso orizzontale.

Questo ragionamento si può ripetere anche quando le prime k-1 derivate calcolate in x_0 sono nulle. Se la k-esima derivata (e cioè la prima diversa da zero) è di ordine pari, avremo in x_0 un massimo o un minimo; se è di ordine dispari avremo un punto di flesso.

Schema per lo studio di una funzione.

Abbiamo fin qui sviluppato ed esaminato dei mezzi di calcolo che ci permettono di studiare il comportamento del grafico di una funzione.
Per questo studio si segue di solito il seguente procedimento:

a) Determinare il campo di definizione della funzione;

b) Calcolare i punti di intersezione con gli assi coordinati;

c) Determinare il segno della funzione ed eventuali simmetrie;

d) Determinare il comportamento della funzione agli estremi del campo di definizione, gli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui;

e) Calcolare i massimi, minimi e i punti di flesso;

f) Tracciare il grafico della funzione calcolando eventualmente il suo valore in qualche punto di particolare interesse.

GLI INTEGRALI

Definizionen 1. Una funzione si dice ***limitata*** quando il suo codominio é un insieme limitato.

Sia dunque y = f(x) una funzione limitata nell'intervallo [a,b]. Su tale intervallo prendiamo n+1 punti x_0, x_1, x_2, ..., x_n con $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots x_{n-1} < x_n = b$ in modo che l'intervallo [a,b] resta diviso in n intervallini $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3] \ldots\ldots [x_{n-1},x_n]$.

Indichiamo con δ_j l'ampiezza dell'intervallo j-esimo e cioé $\delta_j = x_j - x_{j-1}$ con j = 1, 2, 3..., n e sia δ il massimo tra gli *n* numeri δ_j : $\delta = \max(\delta_j)$.

Prendiamo ad arbitrio nel primo intervallo un punto τ_1, nel secondo un punto τ_2..... nell'ennesimo un punto τ_n e calcoliamo la funzione *f(x)* in quei punti $f(\tau_1), f(\tau_2), \ldots, f(\tau_n)$.

Consideriamo poi la somma:

$$S_\delta = f(\tau_1)\,\delta_1, + f(\tau_2)\,\delta_2\ \ldots\ldots f(\tau_n)\,\delta_n. = \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)\delta_j$$

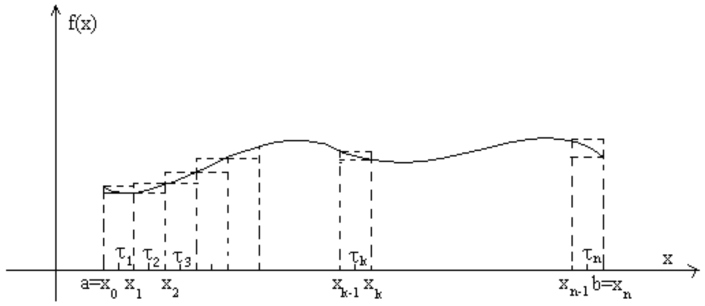


Fig. 1.10.- Somma integrale approssimata per eccesso e per difetto

Definizione 2. La somma S_δ si dice *somma integrale* della funzione f(x) e il suo valore varia al variare di δ e dei punti τ_j.

Si può dimostrare che esiste finito il limite $\lim_{\delta \to 0} S_\delta = J$.

Definizione 3. Il limite J si dice l'integrale definito tra a e b della funzione f(x) e lo si indica con il simbolo $\int_a^b f(x)dx$. Si pone cioé $\lim_{\delta \to 0} S_\delta = J = \int_a^b f(x)dx$.

Proprietà dell'integrale definito.

Notiamo che se due funzioni f(x) e g(x) sono limitate e quindi integrabili in un intervallo [a,b], lo é anche la loro somma, la differenza, il prodotto e il quoziente (se $g(x) \neq 0$). Lo stesso vale per la funzione composta g[f(x)] e la funzione inversa.

Dalla definizione che abbiamo dato per l'integrale definito scendono quindi immediatamente alcune proprietà:

Pr. 2.1. Se f(x) é integrabile in [a,b]:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Def. 2.1. Poniamo in base alla definizione di integrale definito

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Pr. 2.2. Una costante moltiplicativa si può portare fuori o dentro il segno di integrale:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx \quad (c \text{ costante reale}).$$

Pr. 2.3. Se f(x) = m, costante su tutto [a,b] risulta: $\int_a^b m \cdot dx = m\,(b-a)$

Pr. 2.4. L'integrale della somma o differenza di due funzioni é uguale alla somma o differenza degli integrali delle due funzioni:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$ (proprietà distributiva dell'integrale).

Pr. 2.5. Se f(x) é una funzione integrabile negli intervalli [a,c] e [c,b] si ha:

$$\int^b f(x)dx = \int^c f(x)dx + \int^b f(x)dx$$ (proprietà additiva dell'integrale).

Teorema della media. Se f(x) é una funzione continua nell'intervallo [a,b] esiste un punto $\tau \in$ [a,b] in cui

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\tau)$$

Il numero $f(\tau)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ si dice ***valor medio*** della funzione f(x) nell'intervallo [a,b].

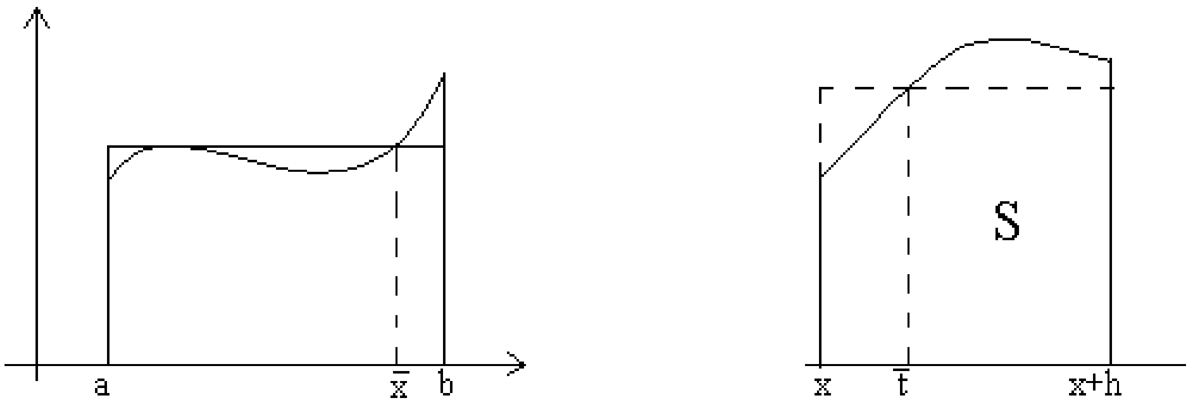


Fig. 5.10.- Il teorema della media

Sia R la regione limitata dal grafico $y = f(t)$ e dalle rette $t = a$, $t = b$ e $y = 0$. Sia poi x un punto qualunque di [a, b] ed R_x la regione limitata da $y = f(t)$, $t = a$, $t = x$, e $y = 0$. Perciò R_a sarà una regione degenere costituita da un segmento, mentre $R_b = R$. Ci riproponiamo ora la domanda di prima "come varia la superficie di R_x quando varia x" e cerchiamo di dare una risposta.

Se A_x é l'area della regione R_x, in termini d'integrale definito si ha:

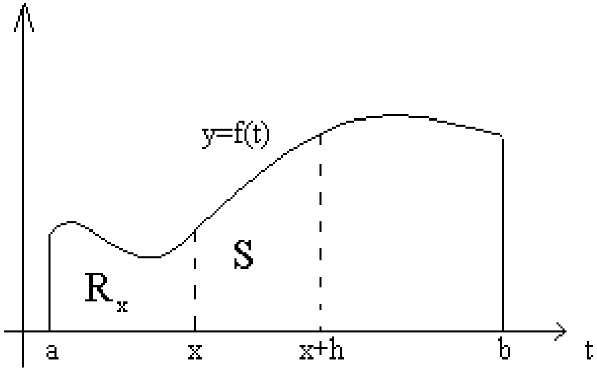


Fig. 6.10.- Incremento della superficie al variare di x.

$A(b) = \int_a^b f(t)dt$ e più in generale $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Abbiamo così una nuova funzione A definita per tutti gli $x \in [a,b]$, e chiederci come varia A al variare di x equivale a chiederci quale sia la sua derivata A'(x) che ora ci proponiamo di determinare.

Sia h un numero positivo e supponiamo che tanto x che x+h appartengano ad [a,b]. Consideriamo le regioni R_x, R_{x+h} ed S.

Si ha che $R_{x+h} = R_x + S$ e quindi $A(x + h) = A(x) +$ area di S, per cui $A(x + h) - A(x) =$ area di S.

A(b) = $\int_a^b f(t)dt$ e più in generale A(x) = $\int_a^x f(t)dt$.

Abbiamo così una nuova funzione A definita per tutti gli x $\in$ [a,b], e chiederci come varia A al variare di x equivale a chiederci quale sia la sua derivata A'(x) che ora ci proponiamo di determinare.

Sia h un numero positivo e supponiamo che tanto x che x+h appartengano ad [a,b]. Consideriamo le regioni R_x, R_{x+h} ed S.

Si ha che $R_{x+h} = R_x + S$ e quindi A(x + h) = A(x) + area di S, per cui A(x + h) - A(x) = area di S.

Concentriamo la nostra attenzione su S; per il teorema della media la sua area é uguale all'area del rettangolo avente per base l'intervallo [x,x+h] e per altezza il valore f(τ) con $\tau \in [x,x+h]$. Cioé A(S) = h·f(τ) e quindi A(x + h) - A(x) = h·f(τ) e

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(\tau)$$

Poiché per ipotesi f é continua $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$ e quindi se h tende a 0, x+h tende a x, e di conseguenza anche τ tende a x.

Perciò: $\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$.

Lo stesso ragionamento vale per h<0 per cui possiamo dire di aver trovato che A'(x) = f(x) oppure

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t) \cdot dt = f(x)$; oppure, in altre parole, la funzione area A(x) ha come derivata la funzione originale f(x).

Teorema. Sia f una funzione continua su [a,b]. Se definiamo la funzione G(x) = $\int_a^x f(x)dx$ per ogni x $\in$ [a,b], allora G'(x) = f(x) per tutti gli x $\in$ [a,b].

Inoltre se F(x) é una funzione la cui derivata é f(x), ponendo G(x) = F(x) + c, e poiché G(a)= F(a) + c = 0, c = - F(a) si ha allora G(x) = F(x) - F(a).

Teorema fondamentale del calcolo integrale (Torricelli Burrows).
Sia f una funzione integrabile su [a,b] e sia F'(x) = f(x) per tutti gli x $\in$ [a,b]. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Il teorema fondamentale é un risultato molto potente. Per una vasta gamma di funzioni (tutte le funzioni continue ad es.) questo teorema sostituisce il problema del calcolo dell'integrale con il problema di trovare, data che sia una funzione f, un'altra funzione la cui derivata é f. Tale funzione si chiama la *primitiva* di f.

Integrali immediati.

Dalle formule e dalle considerazioni fatte in precedenza sulle derivate, abbiamo ricavato un certo numero di integrali indefiniti che chiameremo *integrali immediati* e che possiamo riassumere nella seguente tabella:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \qquad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \ (a > 0 \wedge \neq 1)$$

$$\int e^u du = e^u + c \qquad \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c \qquad \int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + c \qquad \int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\cot u + c \qquad \int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$$

$$\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + c \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c \qquad \int \frac{f'(u)}{f(u)} = \ln|f(u)| + c$$

Integrazione per sostituzione.

In questi esempi abbiamo usato una *versione integrale* della derivata di una funzione composta. Per vederla meglio siano *f* e *g* due funzioni differenziabili ed *F* la primitiva di *f* in modo che *F'= f*. Consideriamo la funzione composta *F(g)*.

Per la regola di derivazione di una funzione composta

$$\frac{d}{dx}F[g(x)] = F'[g(x)]\cdot g'(x) = f[g(x)]\cdot g'(x).$$

Ponendo questa espressione in forma integrale otteniamo: $\int f[g(x)]\cdot g'(x)dx = F[g(x)] + c$.

Se facciamo la sostituzione u = g(x) avremo du = g'(x)·dx e perciò

$\int f(u)\cdot du = F(u) + c$.

Questo ci dice che possiamo ignorare il fatto che u é funzione di x e considerarla come la variabile di integrazione.

Da questo punto di vista quello che facciamo quando calcoliamo un integrale $I = \int h(x)\cdot dx$ é di cercare una funzione f e una opportuna sostituzione u = g(x) tale che h(x) = f(g(x))·g'(x).

Se ciò é possibile possiamo scrivere $I = \int f(u)\cdot du$ e se sappiamo trovare una primitiva F di f allora I = F(u) + c = F[g(x)] + c.

Questo é il metodo di ***integrazione per sostituzione***.

Applichiamolo ad un esempio: $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

Si possono effettuare tre sostituzioni: u = sin x, u = $e^{\operatorname{sen} x}$ e u = cos x; le prime due portano ad un integrale immediato e quindi sono buone, la terza no.

Esaminiamole una per volta:

I) ponendo u = sin x si ha du = cos x·dx e quindi: $\int e^u du = e^u + c = e^{\operatorname{sen} x} + c$

II) se u = $e^{\operatorname{sen} x}$ si ha du = $e^{\operatorname{sen} x}$cos x·dx e quindi: $\int du = u + c = e^{\operatorname{sen} x} + c$

III) se infine u = cos x si ha du = - sin x·dx, ma in questo caso non é facile esprimere $e^{\operatorname{sen} x}$ in termini di u e di conseguenza abbandoniamo questa strada.

Integrazione per parti.

Un metodo di integrazione molto utile lo si ricava dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Siano u e v due funzioni di x entrambe derivabili. Per semplicità sopprimiamo l'argomento x e scriviamo:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Questo ci dice che $u\cdot v$ é una primitiva di $u'\cdot v + u\cdot v'$, per cui in forma integrale si ha

$$\int(u'\cdot v + u\cdot v')\cdot dx = u\cdot v + c.$$

Se spezziamo questo integrale nella somma dei due termini e portiamo a destra il primo troviamo:

$\int u\cdot v'\cdot dx = u\cdot v - \int v\cdot u'\cdot dx + c.$

Questa é detta la ***formula di integrazione per parti***, poiché la funzione integranda é separata in due parti (fattori) u e v'.

Usando questa formula si può calcolare $\int u\cdot v'\cdot dx$ se é possibile calcolare $\int v\cdot u'\cdot dx$; quindi la formula sarà utile se il secondo integrale é facile da maneggiare.

La formula di integrazione per parti, si trova spesso scritta in una forma più facile da ricordare: $\int u\cdot dv=u\cdot v - \int v\cdot du$ ottenuta ponendo $v'\cdot dx = dv$ e $u'\cdot dx = du$.

Applichiamo questa formula a qualche esempio:

$\int x\cdot \cos x\cdot dx$; notiamo che l'integrale é il prodotto di due funzioni x e cos x. Poiché deve essere $u\cdot v'= x\cdot \cos x$ possiamo procedere in due modi, ponendo $u = x$ e $v'= \cos x$ oppure $u = \cos x$ e $v'= x$.

Proviamo il primo: $u = x$, $v' = \cos x$ e di conseguenza $u' = 1$ e $v = \int \cos x\cdot dx = \sin x$.

Per la formula di integrazione per parti si ottiene:

$\int x\cdot \cos x\cdot dx = x\cdot \sin x - \int \sin x\cdot dx = x\cdot \sin x + \cos x + c.$

Integrazione delle funzioni razionali.

Durante tutto il corso abbiamo posto particolare attenzione allo studio delle funzioni razionali. Molte di queste si possono integrare usando le tecniche già viste, come ad esempio $\frac{1}{(a-x)^2}$; $\frac{1}{a^2+x^2}$ e altre.

Funzioni più complicate si trattano con il metodo delle ***frazioni parziali***.

Consideriamo anzitutto i casi più semplici, e per primo quello in cui il denominatore é un polinomio di primo grado mentre il numeratore é una costante: $\int \frac{1}{ax+b}dx$

Noi sappiamo che $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ |-- = log|u| + c, per cui se u = ax + b e du = a·dx e di conseguenza con la regola di sostituzione otteniamo:

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int \frac{a \cdot dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|u| = \frac{1}{a}\log|ax + b| + c.$$

a) Sia x - r un fattore lineare di Q(x) e sia $(x - r)^m$ la più alta potenza di x - r che divide Q(x).

In corrispondenza di questo fattore assegniamo la somma di frazioni:

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\ldots\ldots+\frac{A_m}{(x-r)^m}$$

dove A_1, A_2, ... A_m sono costanti incognite che possono essere tutte nulle tranne A_m.

b) Sia $ax^2 + bx + c$ un fattore di Q(x) tale che $b^2 - 4ac < 0$ oppure per il quale non é conveniente trovare i fattori lineari.

Sia n la più alta potenza di questo fattore che divide Q(x).

In corrispondenza ad esso assegniamo la somma di n frazioni:

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots\ldots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

dove abbiamo 2n costanti incognite che possono essere tutte nulle tranne B_n oppure C_n.

Come esempio ci proponiamo di integrare la funzione R(x) = $\frac{4-2x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}$

Secondo quanto detto possiamo scrivere:

$$R(x) = \frac{4-2x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

Riducendo allo stesso denominatore si ha:

$$4 - 2x = (A + C)x^3 + (- 2A + B - C + D)x^2 + (A - 2B + C)x + (B - C + D)$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B - C + D = 0 \\ A - 2B + C = -2 \\ B - C + D = 4 \end{cases} \quad \text{che risolto da:} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = -2 \\ D = 1 \end{cases}$$

per cui: $$R(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

e quindi: $$\int \frac{4-2x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx - 2\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx .$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Dominio e rappresentazione.

Esistono problemi nei quali una quali una quantita' dipende da due o piu' parametri variabili. Cosi' ad esempio in chimica:

pV = nRT da cui $p = \frac{nRT}{V}$ é una relazione del tipo $z = k\cdot\frac{x}{y}$.

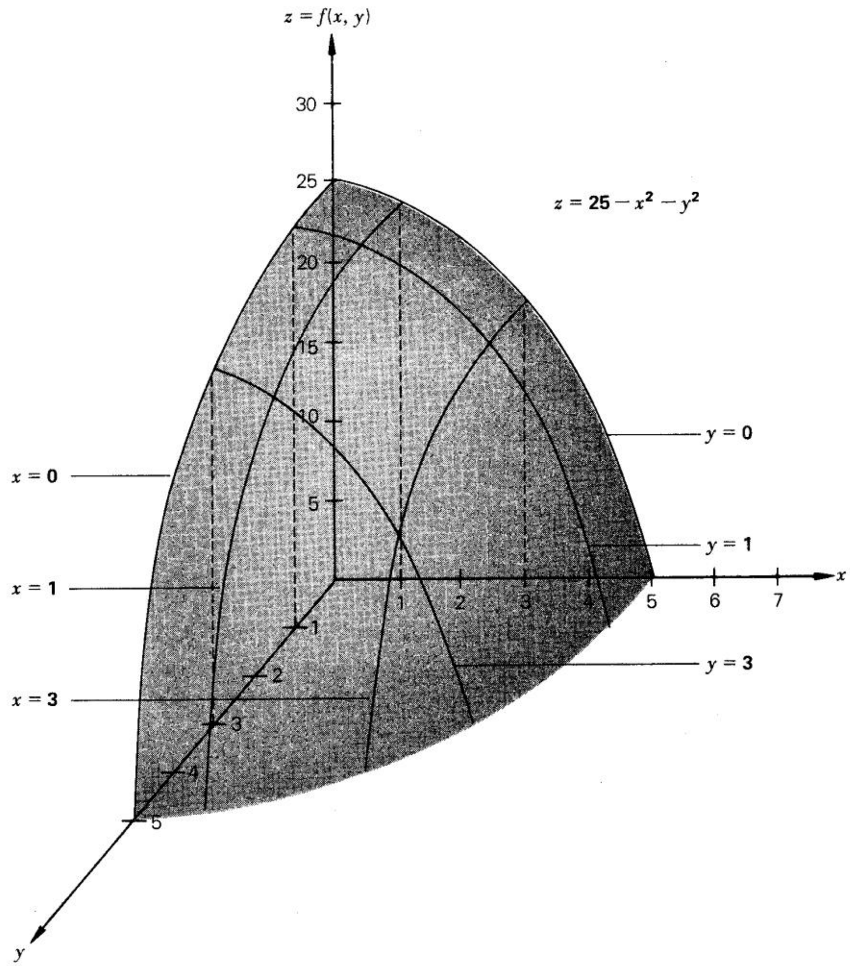
La pressione di un gas dipende sia dalla temperatura che dal volume nel quale é racchiuso (costanti che siano n ed R).
In questo caso si dice che p é funzione delle due variabili T e V ed in generale si scrive:

$$z = f(x,y)$$

dove f e' detta ***funzione multivariata*** o funzione di piu' variabili.
I numeri x ed y sono detti *variabili* ***indipendenti*** e z la variabile dipendente. Il dominio D della funzione f e' un insieme di coppie (x,y) che danno a z valori reali:

$$D = \{(x,y)/x\in R\wedge y\in R\}.$$

Il codominio della funzione sarà l'insieme C di tutti i valori z reali: $C = \{z/\ z\in R\}$.



z = f(x, y)
30
25
20
15
10
5
z = 25 − x² − y²
y = 0
y = 1
y = 3
x = 0
x = 1
x = 3
1
2
3
4
5
6
7
x
y

Derivate parziali.

Poichè la funzione f(x,y) dipende da due variabili, si può calcolare la derivata della funzione f rispetto a ciascuna di esse. Queste due derivate vengono dette *derivate parziali* rispetto alle variabili x ed y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = f_y$$

Se questi limiti esistono e le funzioni f_x ed f_y sono *continue* nel punto P_0 si dice che la funzione f(x,y)è derivabile nel punto P_0.

Il significato della derivata rimane quindi quello di pendenza di una retta ma questa volta f_x e f_y rappresentano la pendenza di due rette in piani paralleli ai piani xz ed yz rispettivamente. Le rette tangenti individuano un piano che è tangente alla superficie rappresentata dalla funzione f(x,y) nel punto P_0.

Quando si calcolano le derivate seconde, si possono avere due situazioni diverse: o si deriva la derivata prima rispetto alla stessa variabile, o si deriva rispetto all'altra variabile. Nel primo caso si avranno le *derivate parziali seconde:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

nel secondo si avranno le derivate seconde miste:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

Si può dimostrare che se le derivate seconde miste sono continue esse sono uguali (teorema di Schwartz).

Piano tangente ad una superficie in un punto

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0\ ,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0\ ,y_0)\ (y - y_0)$$

Se una funzione $z = f(x,y)$ è derivabile n volte in un intorno di P_0 si può scrivere il suo **sviluppo in serie di Taylor** (fermandosi al secondo termine):

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0\ ,y_0)\ (y - y_0) + ½[f_{xx}(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) +$$
$$+ f_{yy}(y - y_0)^2]+R_2$$

Lo scarto della superficie dal suo piano tangente è quindi dato, in prima approssimazione da:

$$\Delta(x,y) = ½[f_{xx}\cdot(x - x_0)^2 + 2f_{xy}\cdot(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}\cdot(y - y_0)^2]$$

Equazione di secondo grado il cui grafico è dato da una superficie detta Quadrica. Se $\Delta(x,y)$ è positiva in un punto P_0 essa sta tutta sopra il piano tangente in un intorno del punto; se è negativa sta sotto; se è uguale a 0, non si può dire niente e bisogna ricorrere ai termini di ordine superiore.

Massimi e Minimi

Definizione. Si dice che una funzione f(x,y) ha un massimo relativo nel punto $P_0(x_0,y_0)$, se esiste un intorno circolare $I_r(P_0)$, per tutti i punti del quale $P \neq P_0$ si ha che $f(P)<f(P_0)$. Se invece $f(P)>f(P_0)$ il punto si dirà di minimo.

Condizione necessaria, (ma non sufficiente) perché un punto sia di massimo o di minimo relativo è che le derivate prime rispetto alla x ed alla y siano entrambe uguali a 0.

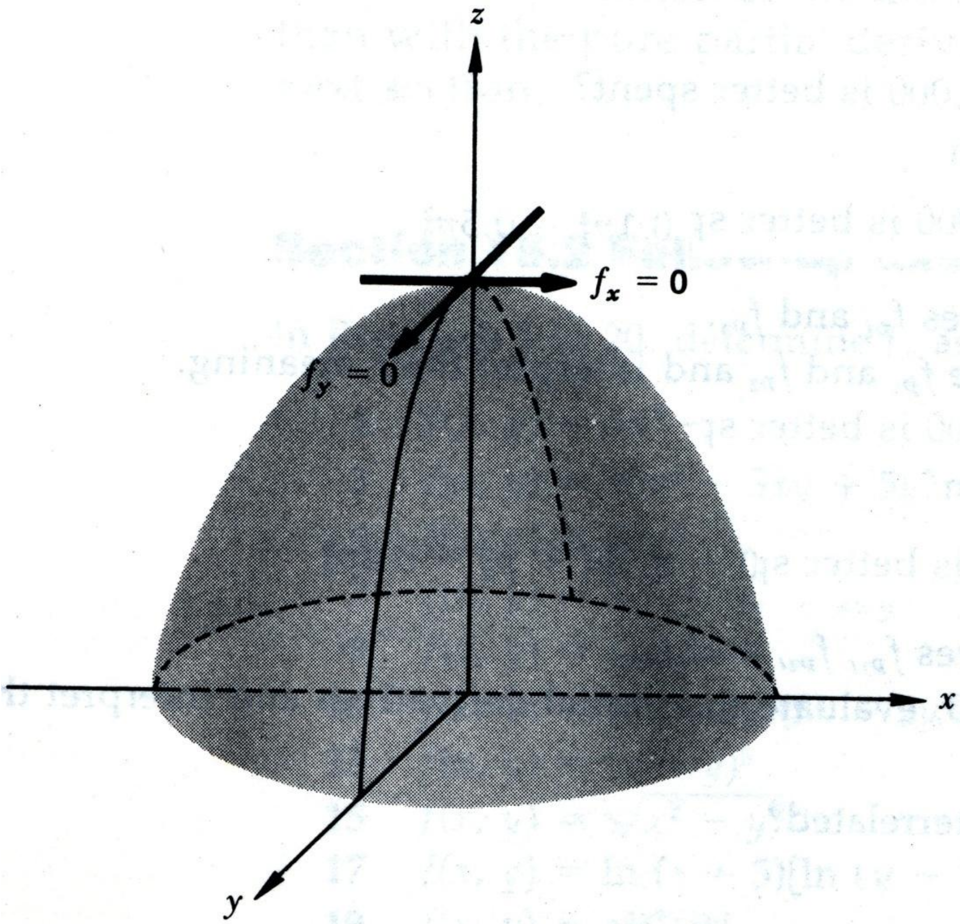
$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

E' necessario poi considerare lo scarto della superficie con il suo piano tangente, $\Delta(x,y)$, che in prima approssimazione è dato da una ***forma quadratica***. Per lo studio dei punti stazionari e delle forme quadratiche si ricorre perciò ad una quantità nuova, detta **determinante Hessiano** e definita in base alle derivate seconde:

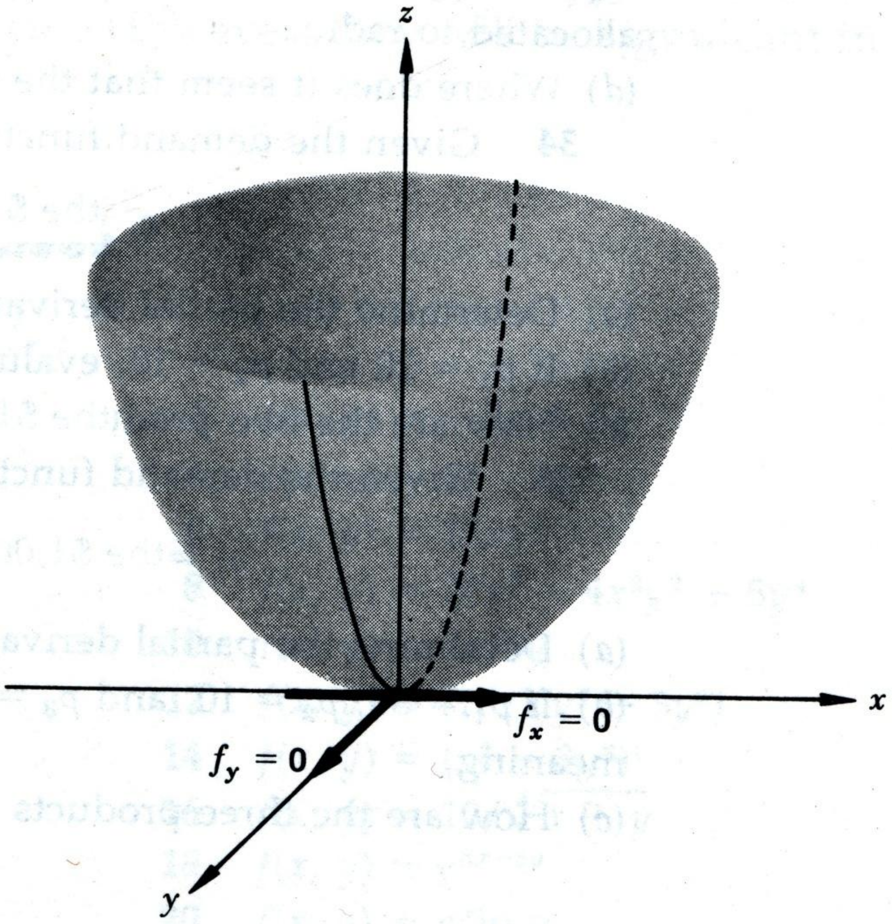
$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

la quale ci permette di discriminare sulla natura del punto in esame a seconda del segno che assume H(x,y) nel punto P.

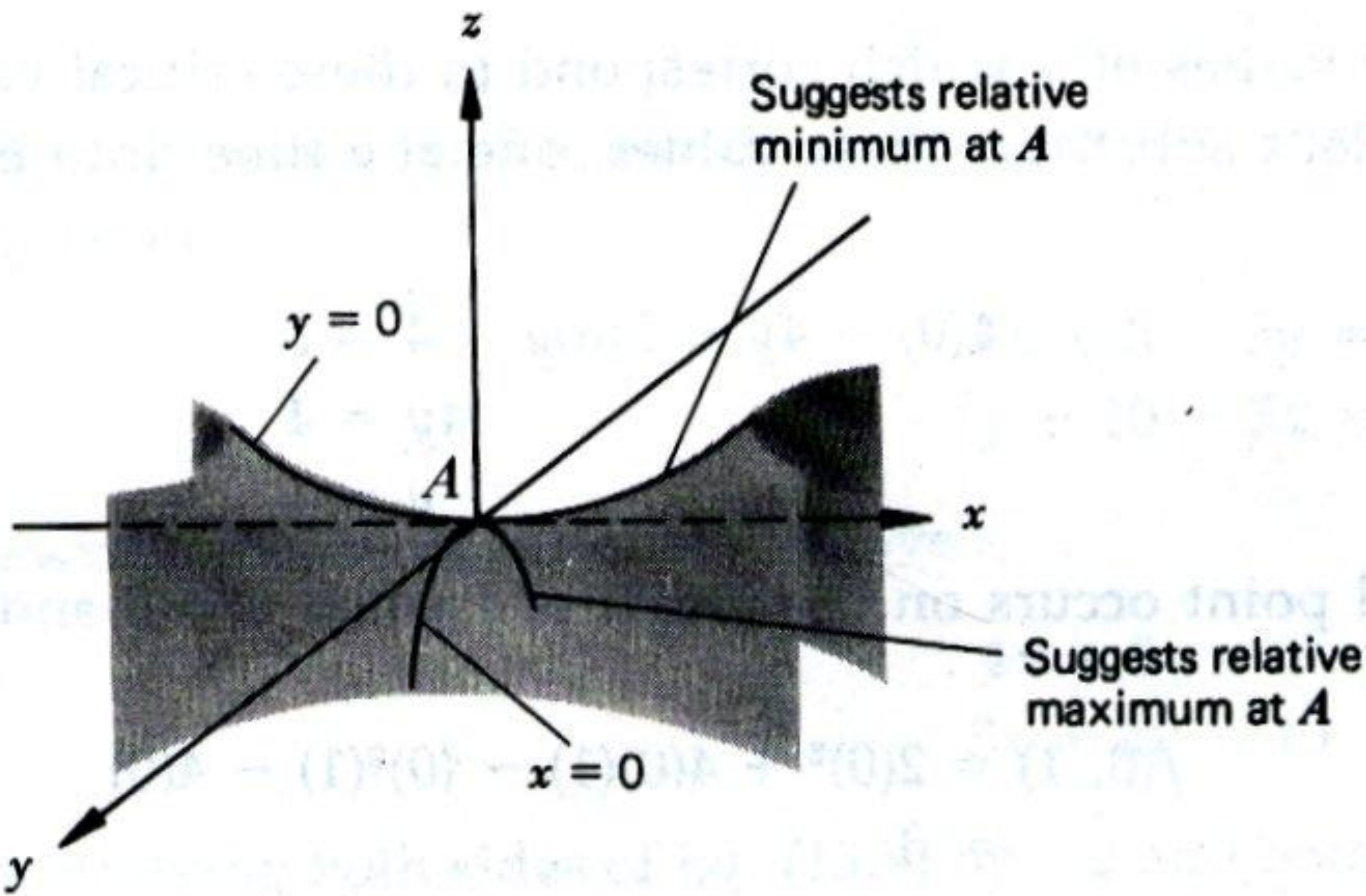
Perciò se in un punto $P_0(x_0,y_0)$ si annullano le derivate prime si possono avere tre situazioni: $H(x_0,y_0) \geq 0$.



(*a*) Relative maximum



(*b*) Relative minimum


z
Suggests relative
minimum at A
$y = 0$
A
x
Suggests relative
maximum at A
$x = 0$
y

Una uguaglianza del tipo $y' = a \cdot y$ viene detta ***equazione differenziale*** del primo ordine
Si vuole determinare l'espressione della funzione y = φ(x) che la soddisfa identicamente e che viene detta *soluzione* o integrale della equazione differenziale.

Una qualsiasi funzione che stabilisce un legame tra le variabili e le derivate di una funzione prende il nome di ***equazione differenziale*** **(E.D.)**

Le equazioni differenziali si distinguono in ***ordinarie*** **e a** ***derivate parziali***, e a seconda dell'*ordine* massimo delle derivate in esse presenti si possono distinguere equazioni differenziali del primo, secondo .... n-esimo ordine. Quelle del primo ordine avranno la forma generica f(x,y,y') = 0 detta forma implicita mentre se è possibile esplicitare rispetto alla y' si può portare l'E.D. nella sua forma normale: y' = f(x,y).
La **soluzione di una E.D.** del primo ordine sarà la funzione y = φ(x) tale che

$$f(x,\varphi(x),\varphi'(x))\equiv 0$$

Ogni soluzione di una E.D., se esiste, sarà definita a meno di una costante e prende il nome **di** ***integrale generale*** o soluzione dell'equazione differenziale.

Al variare di una costante di integrazione l'integrale generale di una equazione differenziale rappresenta una famiglia di curve ciascuna delle quali è detta *integrale o soluzione particolare.*

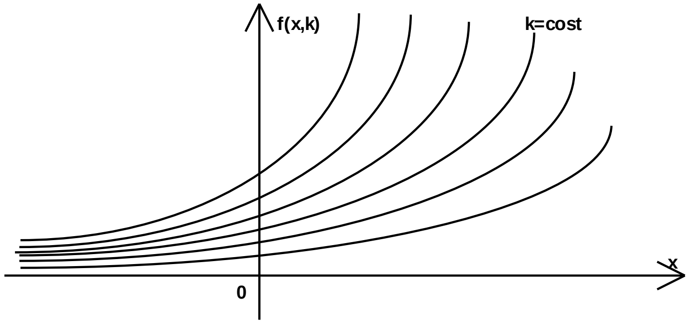


Fig. 1.14.- Una famiglia dicurve..

Integrazione di una equazione differenziale del primo ordine.

Le equazioni differenziali del primo ordine si distinguono in un gran numero di tipi, I più comuni sono:

Equazioni a *variabili separabili*. $y' = A(x)\cdot B(y)$

Equazioni *lineari*: $y' + a(x)\, y = f(x)$

Equazioni di *Bernoulli*: $y' + p(x)\, y + q(x)\, y^{\alpha} = 0$

Nelle applicazioni biologiche si trovano equazioni differenziali a variabili separabili. Gli esempi più comuni sono:

a) $y' = a\cdot y$ b) $y' = a\cdot y + b$ c) $y' = a\cdot y + b\cdot y + c$ d) $y' = k\cdot y/x$

a) Si consideri la equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = a\cdot y$. Per la definizione di differenziale si può scrivere formalmente: $dy = a\cdot y\cdot dx$. Dividendo per y ed integrando ambedue i membri si ottiene: $\frac{dy}{y} = a\cdot dx$; $\log y = ax + c$

dove c'è una costante arbitraria. Per cui $y = e^{ax+c}$ e ponendo $e^{c} = k$ si ottiene $y = k\, e^{ax}$ che è una funzione esponenziale con dato coefficiente *a* e costante arbitraria *k*. Assegnato *a* si ottiene, al variare di k una famiglia di curve.

$a)\ y' = a \cdot y \qquad b)\ y' = a \cdot y + b \qquad c)\ y' = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$

Si possono così configurare3 tipi di equazioni differenziali a variabili separabili.

a) La prima rappresenta la crescita di una popolazione di **N(T) individui** con tasso di incremento λ:

$N'(t) = \lambda N(t)$ da cui $dN(t)/dt = \lambda N(t)$ e quindi $dN(t)/N(t) = \lambda dt$ per cui integrando membro a membro si ottiene: $\log[N(t)] = \lambda t + c$ dove c è una costante arbitraria di integrazione che dipende dalle condizioni iniziali :c = 0. Di conseguenza al tempo t il numero di individui della popolazione sarà:

$N(t) = e^{\lambda t + c} = N_0 \cdot e^{\lambda t}$

Lo stesso vale per l'incremento di un capitale M(t) con tasso di interesse λ. Se λ è negativo si ha un decremento di M(t) (ad es . Nel caso di svalutazione). O decadimento radioattivo.

b) Il secondo caso si ha quando oltre a ll'incremento λ si ha una immigrazione:
per cui: $N'(t) = \lambda N(t) + q$ per cui, con procedimento analogo si ricava:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda y + q = \lambda\left(y + \frac{q}{\lambda}\right) \quad e\ quindi\ N(t) = N_0\, e^{\lambda t} - \frac{q}{\lambda}$$

Crescita Limitata

c) Il terzo tipo si ha si ha nel caso di crescita limitata e cioè quando y nonn può superare il valore B (per motivi dim spazio, di cibo o altro).
Procedendo in modo analogo si trova:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(B - y)$$

$$y = \frac{B}{1 + ke^{-\lambda Bt}}.$$

The Differential Equation $y' = ay^2 + by + c$ 355

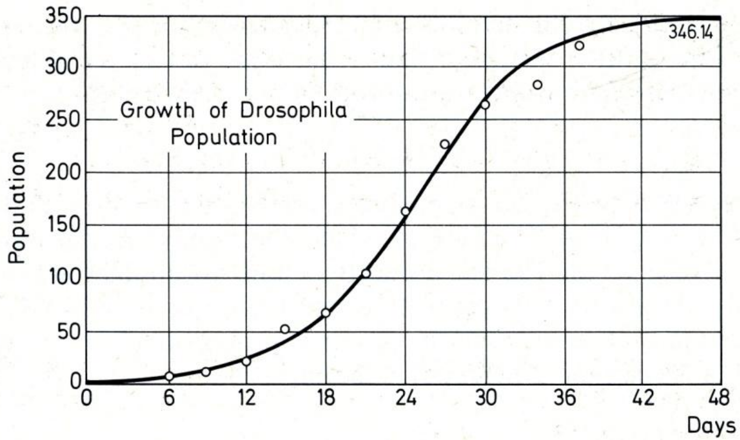


Fig. 11.5. Growth of a population of Drosophila under controlled experimental conditions. The figure is reproduced from Lotka (1956, p. 69). Data are attributed to R. Pearl and S. L. Parker

Sviluppo di una infezione

Supponiamo di introdurre **un infetto** in una popolazione di n individui. Al tempo t si avranno y infetti e x sani:

$$x + y = n + 1 \,.$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta y x$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta y (n + 1 - y) \,.$$

$$y = \frac{n + 1}{1 + k e^{-\beta (n+1) t}} \,. \qquad y(0) = 1 = (n+1)/(1+k) \qquad k = n.$$

$$y = \frac{n + 1}{1 + n e^{-\beta (n+1) t}}$$

Così otteniamo il grafico della crescita limitata.

Il metodo dei minimi quadrati.

Volendo determinare se c'è una correlazione tra età e pressione arteriosa è stato preso in considerazione un gruppo di 12 donne:

Età (X)	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
Press.s.(Y)	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

Si vuole determinare se tra queste due variabili aleatorie esiste un legame (correlazione) e se si può determinare la funzione (regressione) che lo esprime.
Considerando la variabile X come una variabile deterministica, cioè considerando i valori x_1, x_2, ... x_n come assegnati possiamo pensare i valori y_1, y_2, ... y_n come le determinazioni di tante variabili aleatorie Y_1, Y_2,.... Y_n aventi speranza matematica $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots. \overline{Y}_n$ e varianza σ^2.

La funzione

$$L(Y_1, Y_2,\ldots. Y_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \prod_{i=1,n} \sigma_i} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(Y_i - \overline{Y}_i\right)^2}{\sigma_i^2}}$$

rappresenta la probabilità di presentarsi che ha un dato campione y_1, y_2, ... y_n e il suo logaritmo

$$\mathrm{Log}\,(L) = \log \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \prod_{i=1,n} \sigma_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(Y_i - \overline{Y}_i\right)^2}{\sigma_i^2}$$

viene detta ***funzione di verosimiglianza*** e sarà massima quando sarà minima la quantità

$$Q(y_1, y_2, \ldots. y_n, a, b) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(Y_i - \overline{Y}_i\right)^2}{\sigma_i^2}$$

I valori di a e b si trovano annullando il sistema:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2\left[\sum x_i \cdot y_i - a \cdot \sum x_i^2 - b \cdot \sum x_i\right] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2\left[\sum y_i - a \cdot \sum x_i^2 - b \cdot n\right] = 0$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i = \sum x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum x_i + n \cdot b = \sum y_i \end{cases}$$

Come si vede si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite risolubile con i metodi dell'algebra lineare.

Da esso si ricavano:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

che sono i *coefficienti di massima verosimiglianza*.

Coefficiente di Correlazione

Prendendo in considerazione pesi ed altezze di un gruppo di studenti possiamo ipotizzare una correlazione tra queste due variabili aleatorie, nel senso che chi è più alto pesa .di più.
Troveremo così una retta di regressione y = ax + b
Se consideriamo come variabile indipendente il peso troveremo u'altra retta di regressione: y = a'x + b'
Da queste si può ricavare la quantità:

$$r = \sqrt{a \cdot a'} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

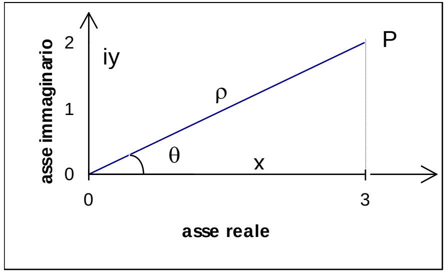
Che prende il nome di **coefficiente di correlazione** tra le variabili aleatorie x e y.

NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA.

Un ***numero complesso*** $\boldsymbol{\alpha}$ viene definito da una coppia di numeri reali x e y detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso:

$$\alpha = x + i\, y$$

Il numero complesso si può quindi rappresentare come un punto P di un piano (*piano complesso*) avente in ascissa la sua parte reale ed in ordinata quella immaginaria.
Il numero complesso $\bar{\alpha} = x - i\, y$ è detto il ***complesso coniugato*** di α e ponendo $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$, si ottiene $\alpha\,\bar{\alpha} = x^2 + y^2 = \rho^2$. La quantità $\rho = |\alpha|$



Il piano complesso.

viene detta il ***modulo*** del numero complesso e l'angolo $\theta = \operatorname{atan} \frac{y}{x}$ il suo ***argomento***.

Dati due numeri complessi: $\alpha = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ e $\beta = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$

si può definire il loro prodotto $\alpha\,\beta = \rho\,\rho_1\,[\cos(\theta + \theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \theta_1)]$

da dove si può calcolare il quadrato $\alpha^2 = \rho^2\,(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$
e la potenza n-esima $\alpha^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ (formula di De Moivre)

La radice n-esima di un numero complesso.

Se $\zeta^n = z$ allora ζ è la radice di z.

Per cui se: $z = \rho\,(\cos\phi + i\sin\phi)$ $\zeta = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\zeta^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho\,(\cos\phi + i\sin\phi)$$ e quindi:

$r^n = \rho$ $r = \rho^{1/n}$ e inoltre: $n\,\theta = \phi + 2\,h\,\pi$ $\theta = \dfrac{\phi + 2h\pi}{n}$

$$\zeta_h = \rho^{1/n}\left[\cos\frac{\phi + 2h\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2h\pi}{n}\right]$$ per $h = 0,1,2,\ldots\ldots n-1$

Perciò, **ogni numero complesso $z \neq 0$ ha n e soltanto n radici n-esime** algebriche distinte che si ottengono ponendo $h = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$.

Così, ad esempio, si possono calcolare le radici quarte dell'unità che risultano:

$$\sqrt[4]{1} = 1,\ i,\ -1,\ -i.$$

Definizione di *esponenziale* nel campo complesso.

Per ogni numero complesso $\alpha = x + i\, y$ **si pone**: $e^{x+iy} = e^{x} (\cos y + i \sin y)$.
Perciò, **se** $\mathbf{x = 0}$ $e^{iy} = \cos y + i \sin y = f(y)$. Da qui si vede che: $e^{i(y+2\pi k)} = e^{iy}$ e quindi la **funzione esponenziale**, nel campo complesso **è periodica di periodo** $\mathbf{2\pi \mathit{i}}$: $e^{z+2\pi i} = e^{z}$.

Poichè: $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ si ricavano le:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

che sono dette **formule di Eulero**.

Si possono così trovare $\cos^{m} y$ e $\sin^{n} y$ e si può definire anche il ***logaritmo naturale*** nel campo complesso. Posto $e^{w} = z$ si ha

$$w_k = \ln |z| + i\, [\arg(z)+2k\pi]$$

con k intero relativo qualunque. Per $k = 0$ si ottiene $w_0 = \ln |z| + i \arg(z)$ che viene detto *logaritmo principale* del numero complesso z. Perciò

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z).$$

Equazioni lineari.

Si distinguono di solito tre casi:

a) Equazioni lineari del primo ordine. Esse hanno la forma:

$y' + a(x)\, y = f(x)$ e la

$y' + a(x)\, y = 0$ prende il nome di omogenea associata.

L'integrale generale della equazione lineare completa è dato dalla somma dell'integrale generale della omogenea associata più un integrale particolare della equazione completa. L'integrale generale della omogenea si trova facilmente con il metodo delle variabili separabili se $a(x)$ è integrabile:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)\,dx \qquad \log|y| = \int a(x)\,dx + c \qquad y_1(x) = e^{\int a(x)\,dx + c} = c_1\, e^{\int a(x)\,dx}$$

Un **integrale particolare della completa si trova ponendo**:

$g(x)=h(x)\, y_1(x)$ e sostituendo $h'(x)\, y_1(x) + h(x)\, y'_1(x)+h(x)\, y_1(x)\, a(x) = f(x)$

raccogliendo a fattor comune: $h'(x)\, y_1(x) + h(x)\, [y'_1(x)+ y_1(x)\, a(x)] = f(x)$

poiché $y'_1(x)+ y_1(x)\, a(x) =0$ rimane $h'(x)\, y_1(x) = f(x)$ da cui si ricava

$h'(x) = f(x)/ y_1(x)$ e quindi $h(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx$.

La funzione cercata quindi sarà $g(x) = y_1(x) \int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx$

e **quindi l'integrale generale della equazione completa è:** $y(x) = y_1(x) + g(x)$.

Equazioni lineari di ordine qualunque

Quanto detto per le equazioni del primo ordine vale anche per quelle di ordine qualunque:

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\, y = f(x)$$

e le loro omogenee associate: $$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\, y = 0$$

In generale la loro risoluzione è un problema piuttosto complesso. Nelle applicazioni, molto spesso i coefficienti a_k sono costanti.

c) Equazioni **lineari del secondo ordine** a coefficienti costanti:

$$y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$$

L'integrale generale della equazione completa è la somma dell'integrale generale della omogenea associata con un integrale particolare della equazione completa.
Le soluzioni della omogenea associata $y'' + b\,y' + c\,y = 0$ si trovano risolvendo la ***equazione algebrica caratteristica*** $\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$
Se $\Delta > 0$ e λ_1, λ_2 sono le radici della equazione caratteristica, allora le funzioni $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ formano un ***sistema fondamentale***.

Se $\Delta = 0$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ per cui $y_1 = e^{\lambda x}$ e $y_2 = xe^{\lambda x}$

Se $\Delta < 0$ allora λ_1 e λ_2 sono complesse coniugate per cui $\lambda_1 = \beta + i\gamma$ e $\lambda_2 = \beta - i\gamma$

Di conseguenza

$y_1(x) = e^{(\beta+i\gamma)x} = e^{\beta x} (\cos \gamma x + i \operatorname{sen} \gamma x)$ $\qquad$ $y_2(x) = e^{(\beta-i\gamma)x} = e^{\beta x} (\cos \gamma x - i \operatorname{sen} \gamma x)$

da cui si vede che anche $y_1^*(x) = (y_1 + y_2)/2 = e^{\beta x} \cos \gamma x$; $y_2^*(x) = (y_1 - y_2)/2i = e^{\beta x} \operatorname{sen} \gamma x$ sono soluzioni dell'equazione data.

In generale $\quad y(x) = c_1\, y^*_1(x) + c_2\, y^*_2(x) + g(x) \quad$ dove $g(x)$ è un integrale particolare della equazione completa che deve essere determinato separatamente.

Se $G(x) = 0$ si ha: $y(x) = c_1\, e^{\beta x} \cos \gamma x + c_2\, e^{\beta x} \operatorname{sen} \gamma x$ dove, ponendo
$c_1 = A \cos \varphi$ e $c_2 = A \operatorname{sen} \varphi$ si ottiene: $y(x) = A\, e^{\beta x} \cos (\gamma x - \varphi)$.

L'Equazione Fondamentale della Dinamica

Lineari sono alcune importanti equazioni differenziali che derivano dal principio fondamentale della dinamica: f = ma. Poiché l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio y(t) rispetto al tempo, possiamo scrivere: my'' - f = 0.

Pensando al moto del pendolo possiamo distinguere tre situazioni:

a) Assenza di attrito

Moto armonico semplice: my'' + ky = 0; dove ponendo t = x; β = 0; $\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}}$ si ottiene:

$$y(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \varphi\right)$$

In assenza di attrito (pendolo nel vuoto).

b) Attrito proporzionale alla velocità y':

Moto armonico smorzato: my'' + βy' + k y = 0; dove β (<1) è il coefficiente di smorzamento:

$$y(t) = A\, e^{\beta t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \varphi\right)$$

Oscillazioni smorzate.

c) Impulso con periodo ω:

Oscillazioni forzate: my'' + by' + k y = F cos ωt. Oscillazioni smorzate ma con impulso periodico (altalena).