

Giorgio Poretti

# Appunti di Matematica e Informatica

per il corso di Laurea in Chimica e Tecnologie Farmaceutiche



A.A. 2013-14

# I ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

## Introduzione

Un aspetto importante del pensiero matematico trova il suo fondamento nell'esame di proposizioni e nella determinazione del loro *valore logico* (**Vero** oppure **Falso**). Una *proposizione* è un'espressione orale oppure scritta che traduce in forma compiuta un nostro pensiero. Essa può essere *semplice* ("oggi piove", "voglio andare in ufficio", "ho l'ombrello"), oppure *composta* ("oggi piove vorrei andare in ufficio ma non ho l'ombrello"). Una proposizione composta può essere suddivisa in un certo numero di proposizioni semplici. Data una proposizione semplice  $p$  posso crearne una nuova  $\bar{p}$  negando la precedente ("oggi non piove", "non vado in ufficio", "non ho l'ombrello").



Interno di una farmacia (Campo Sacro - TS)

Il valore logico della  $\bar{p}$  è "Vero" (V) se  $p$  è falso e "Falso" (F) se  $p$  è vero.

Ciascuna proposizione semplice ha un *valore logico* che può essere "Vero" oppure "Falso" e date due proposizioni semplici  $p$  e  $q$  possiamo formarne una composta  $p \wedge q$  ( $p$  e  $q$ ) che è vera quando  $p$  e  $q$  sono entrambe vere, altrimenti è falsa. Analogamente la proposizione  $p \vee q$  ( $p$  o  $q$ ) è vera (V) quando  $p$  oppure  $q$  sono vere, falsa (F) quando sono entrambe false. Se la verità di una proposizione  $q$  ("prendo l'ombrello") dipende da quella di un'altra  $p$  ("piove") posso considerare una proposizione condizionale  $p \rightarrow q$  ("se  $p$  allora  $q$ "): "se piove prendo l'ombrello".

Volendo esprimere una condizionalità più rigorosa tra  $p$  e  $q$ , si scrive  $p \leftrightarrow q$  che si legge "se e soltanto se". ("prendo l'ombrello se e soltanto se piove").

A ciascuna di queste situazioni si può associare una tabellina che chiamiamo **tavola di verità**.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

a)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

b)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	?V
F	F	?V

c)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

d)

## 1. Gli Insiemi.

Stiamo allestendo una nuova farmacia. I rappresentanti delle case produttrici ci hanno portato i farmaci di uso più comune, abbiamo dei moderni scaffali per collocarli e ci poniamo la domanda “dove li metto?”. Si tratta di trovare un criterio di collocazione che permetta di rintracciare un prodotto nel modo più rapido quando ne abbiamo bisogno. Scartato l’ordine alfabetico generale perché poco intuitivo e di difficile aggiornamento, pensiamo ad un criterio per **gruppi omogenei** e **categorie** di farmaci.

Una prima suddivisione sarà certamente per modalità di somministrazione e di confezione: pillole, iniettabili, pomate, sciroppi, detergenti.

Noi vogliamo che tutti i farmaci abbiano una loro collocazione e che questa sia unica.

Se i farmaci di un certo tipo (ad esempio le pillole) sono in quantità molto elevata, possiamo suddividerli in diverse categorie a seconda del luogo della loro azione farmacologia come vengono proposti dalla farmacopea ufficiale: apparato neuromuscolare, sistema nervoso centrale, infiammazioni, apparato renale e cardiovascolare, funzione gastrointestinale, chemioterapia delle infezioni parassitiche, malattie microbiche, neoplasie, immunologia, patologie del sangue, disfunzioni ormonali, vitamine, dermatologia, oftalmologia e tossicologia.

Oppure a seconda del tipo di azione farmacologia: analgesici, antibiotici, ansiolitici, antiallergici, antireumatici, antipertensivi, cardiotonici, antinfiammatori ecc..

All’interno di ciascuna categoria potrò sistemare i prodotti in ordine alfabetico di nome commerciale.

Effettuato un ordinamento di questo genere, se leggo una ricetta posso rapidamente individuare il prodotto prescritto o se non ricordo la categoria posso farmela indicare dal computer.

Inoltre ci chiediamo anche **quanti** sono i farmaci di ogni gruppo in modo da dargli spazio sufficiente sugli scaffali di cui conosciamo la capacità.

In questo discorsetto abbiamo parlato di **categorie**, di **gruppi** e **sottogruppi** di **tipi di farmaci** e del **numero di farmaci** che appartengono a ciascun gruppo o categoria. Cerchiamo ora di generalizzare questo discorso.

Ogni scienza ha come fondamento alcuni concetti intuitivi che non possono essere definiti, ma il cui significato viene compreso in base all’esperienza. In geometria, esempi di concetti primitivi sono il punto e la retta, in fisica il tempo e la massa. Noi ora ci soffermiamo a considerare un altro concetto primitivo, quello di **insieme**.

Nel linguaggio comune esistono molti termini per indicare un gruppo di oggetti. I biologi dividono animali e piante in **specie**, **famiglie**, **generi**, gli statistici prendono in esame dei **campioni** di una certa **popolazione**, i medici parlano di **sindrome** che è un gruppo di sintomi, i farmacisti parlano di **categorie** di farmaci. Tutti questi termini: specie, classe, gruppo, categoria e altri ancora, hanno qualcosa in comune che i matematici indicano con il solo nome di **insieme**.

Insieme è quindi un gruppo qualunque di oggetti, persone, animali, piante, fenomeni, stimoli, reazioni, tratti genetici, idee, possibilità logiche, purchè ben definito e distinto da un altro. Ad esempio formano un insieme i pazienti di un reparto, i *farmaci contenenti cortisone* oppure i numeri interi maggiori di 12.

Indichiamo con A l'insieme dei numeri pari inferiori a 10. Si può scrivere:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}.$$

e i numeri 2, 4, 6, 8 si dicono gli *elementi* dell'insieme A. In generale, gli elementi si indicano con lettere minuscole e gli insiemi con lettere maiuscole.

Per indicare che l'elemento *a* appartiene all'insieme A si scrive  $a \in A$ . Se *b* non appartiene ad A si scrive  $b \notin A$ , il che significa che *b* non è un membro di A.

Se un insieme è formato da un numero finito di elementi, lo si può rappresentare come si è già fatto per A. Quando questa rappresentazione non è possibile o non è conveniente, si deve ricorrere ad espressioni logiche P(x) scrivendo

$$B = \{x/P(x)\}$$

dove si intende che B è l'insieme di tutti gli elementi x per i quali la proposizione P(x) è vera. Così ad esempio:

$$C = \{x/x > 15\}$$

rappresenta l'insieme dei numeri maggiori di 15, mentre

$$D = \{y/G(y) > 120\}$$

potrebbe essere l'insieme dei pazienti y con glicemia superiore a 120 mg/l.

Se la proposizione P(x) è sempre falsa, l'insieme B non contiene alcun elemento. Esso viene detto *insieme vuoto* e viene indicato con il simbolo  $\emptyset$ .

Ogniqualevolta nella trattazione di un problema si prende in considerazione un insieme, si suppone di prelevare i suoi elementi da un insieme U più ampio che viene detto *universo* e rappresenta in sostanza la fonte dalla quale preleviamo gli elementi per le nostre considerazioni. Così ad esempio se cerchiamo l'insieme degli studenti laureati con lode, dovremo prelevarlo dall'insieme di tutti gli studenti, oppure l'insieme dei farmaci contenenti una data sostanza, dovremo prelevarlo dall'insieme di tutti i farmaci della farmacopea ufficiale. Se si parla di insiemi numerici, l'universo che si considera in generale quello dei numeri reali, ma potrebbe anche essere quello dei numeri naturali o razionali.

## 2. Relazioni tra insiemi.

Una categoria di farmaci può comprendere diversi gruppi di prodotti. Ad esempio gli antimicrobici si divideranno in sulfamidici, antibiotici, aminoglicoidi, antimicotici e antivirali. Avremo quindi che l'insieme degli antibatterici (penicilline, cefalosporine altri antibiotici) è una parte e cioè un sottoinsieme dell'insieme (categoria) degli antimicrobici.

Più semplicemente siano  $S = \{1, 2\}$  e  $T = \{1, 2, 4, 6\}$  due insiemi di numeri naturali, notiamo che ogni elemento di  $S$  è anche un elemento di  $T$ . In generale:

Def. 2.1. Un insieme  $S$  si dice **sottoinsieme** di un altro insieme  $T$  se ogni elemento di  $S$  è anche un elemento di  $T$ . Cioè se :  $x \in S \Rightarrow x \in T$ .

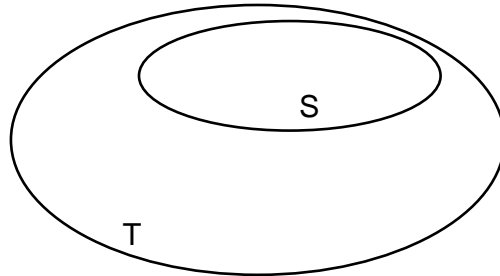


Fig. 2.1.-  $S$  è un sottoinsieme proprio di  $T$ .

In simboli si può scrivere  $S \subseteq T$  e si dice che  $S$  è contenuto in  $T$ . Così l'insieme dei numeri pari è un sottoinsieme di quello dei numeri naturali e l'insieme dei pazienti che presentano un'alcalosi metabolica scompensata è un sottoinsieme di quello dei cirrotici.

Questa relazione risulta più evidente se i due insiemi vengono rappresentati come due regioni del piano (**diagramma di Venn**).

Per indicare che  $S$  non è contenuto in  $T$  scriveremo  $S \not\subseteq T$ .

Def. 2.2. L'insieme  $A$  si dice **sottoinsieme proprio** dell'insieme  $B$  se si ha  $A \subseteq B$  e  $A \neq B$ . In questo caso scriveremo  $A \subset B$ .

Def. 2.3. Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$  i due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono **uguali**.

### 3. Operazioni tra insiemi.

Dal punto di vista terapeutico è molto importante conoscere gli effetti collaterali o gli effetti multipli di un farmaco. E' utile quindi conoscere quali sono i farmaci che appartengono a due o più dei gruppi visti in precedenza. Ad esempio possiamo chiederci quali farmaci abbiano un'azione analgesica oppure antinfiammatoria; in un altro caso ci possono interessare i farmaci che siano sia antiinfiammatori che e antiipertensivi (aspirina).

In generale dati due insiemi  $A$  e  $B$  possiamo avere la necessità di costruire dei nuovi insiemi formati con elementi di  $A$  e di  $B$ . Ad esempio quello formato dagli elementi che appartengono sia ad  $A$  che a  $B$ , oppure quello i cui elementi appartengono o ad  $A$  oppure a  $B$ .

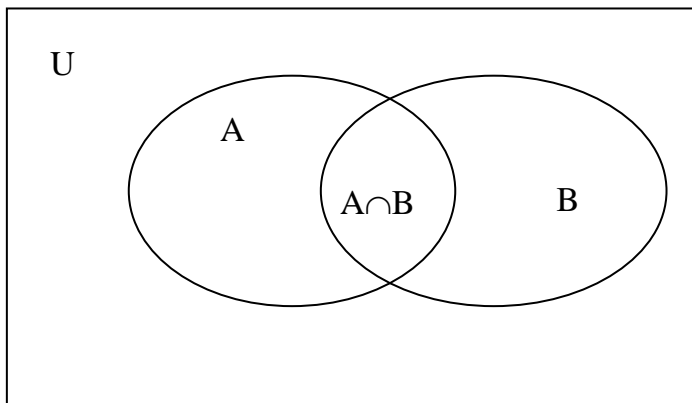


Fig. 3.1 – Intersezione tra due insiemi.

Def. 3.1. Dati due insiemi  $A$  e  $B$  si dice **intersezione** di  $A$  e  $B$  (e la si indica con  $A \cap B$ )

l'insieme di tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B.

In simboli  $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$ . Ad esempio se  $S = \{2, 4, 6, 8\}$  e  $T = \{1, 2, 3, 4\}$  allora  $S \cap T = \{2, 4\}$ .

Nel diagramma di Venn l'intersezione è costituita dalla regione comune ai due insiemi.

Def. 3.2. Se A e B sono due insiemi tali che  $A \cap B = \emptyset$  (non contengono elementi comuni) si dice che essi sono *disgiunti*.

Def. 3.3. Si dice *riunione* di due insiemi A e B (e la si indica  $A \cup B$ ) l'insieme degli elementi che sono compresi in A e in B, inclusi quelli in comune.

In simboli si può scrivere  $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$ .

Ad esempio se S e T sono quelli del caso precedente si avrà:

$$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}.$$

Nel diagramma di Venn la riunione sarà la regione occupata complessivamente dai due insiemi.

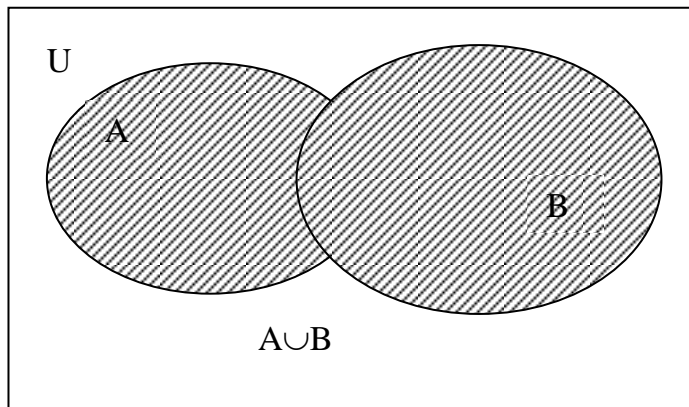


Fig. 4.1 L'insieme riunione di A e B.

Somministriamo un farmaco ad un gruppo di pazienti, A e B sono gli insiemi dei pazienti che hanno avvertito due effetti collaterali diversi. La riunione  $A \cup B$  l'insieme di quelli che hanno notato almeno un effetto secondario e l'intersezione  $A \cap B$  è l'insieme di quelli che li hanno avvertiti tutti e due.

Se indichiamo U l'universo dal quale abbiamo tratto gli elementi di A, possiamo dire che A è un sottoinsieme di U ( $A \subset U$ ).

Gli elementi di U non appartenenti ad A formano a loro volta un insieme. Nell'esempio precedente sarebbe l'insieme dei pazienti che non hanno lamentato alcun effetto secondario.

Def. 3.4. Si dice *complementare* di A rispetto all'universo U, l'insieme di tutti gli elementi di U che non appartengono ad A.

Questo nuovo insieme viene indicato con  $\bar{A}$  per cui:

$$\bar{A} = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}.$$

Si deducono facilmente alcune proprietà delle operazioni tra insiemi finora esaminate

$$A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup \bar{A} = U, \bar{\bar{A}} = A$$

e inoltre se  $A \subset B$  si ha che  $\bar{B} \subset \bar{A}$

Si può anche verificare che  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ , e che  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

Def. 3.5. Dati due insiemi A e B si dice **differenza** di A e B l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B.

In simboli  $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$  si può verificare che

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

L'insieme differenza  $A - B$  è quello dei pazienti che hanno avvertito solo l'effetto A

#### 4. Partizione di un insieme.

Il problema di sistemare i farmaci sugli scaffali di una farmacia in gruppi omogenei in modo da dare a ciascuno una posizione unica si presenta spesso nella vita quotidiana.

In moltissimi problemi è necessario o comunque utile suddividere gli elementi di un insieme in un certo numero di sottoinsiemi in modo che ciascun elemento appartenga a uno e uno solo di tali sottoinsiemi.

Def. 4.1. Si dice **partizione** di un insieme A non vuoto una suddivisione di esso in sottoinsiemi che sono disgiunti e tali da esaurire A.

Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (non vuoti) è una partizione di A dovranno essere soddisfatte le due seguenti condizioni:

$$1) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$$

$$2) A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j$$

Così ad esempio gli studenti di una scuola devono essere divisi in tanti gruppi quante sono le classi. Questa suddivisione deve essere fatta in modo che ciascun studente appartenga ad una ed una sola classe.

La partizione più semplice dell'insieme universo U è quella costituita da un insieme A e dal suo complementare. Ad esempio i promossi ed i respinti ad un certo esame, oppure i portatori ed i non portatori di un certo gene.

#### 5. Il numero degli elementi di un insieme finito.

Sia X un insieme finito e sia  $n(X)$  il numero dei suoi elementi. Dati due insiemi qualunque A e B ci si chiede quale è il numero degli elementi della loro riunione, della loro intersezione, del loro complementare ecc.

Se A e B sono disgiunti:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  altrimenti:

$$n(A) = n(A \cap \bar{B}) + n(A \cap B)$$

$$n(B) = n(\bar{A} \cap B) + n(A \cap B).$$

Sommando membro a membro si trova:

$$n(A) + n(B) = n(A \cap \bar{B}) + n(\bar{A} \cap B) + 2 n(A \cap B).$$

Poiché  $n(A \cap \bar{B}) + n(\bar{A} \cap B) + n(A \cap B) = n(A \cup B)$  si ottiene:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

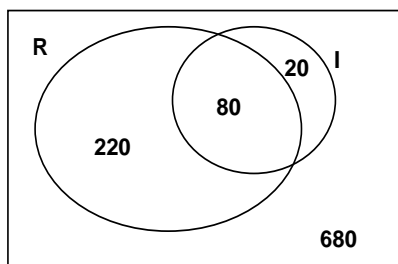
Durante il test di un farmaco i pazienti che lo hanno ricevuto denunciano due effetti collaterali A e B. Il numero dei pazienti che hanno avuto dei disturbi indesiderati sarà dato dal numero di quelli che hanno avuto l'effetto A più quelli che hanno avuto l'effetto B meno il numero di quelli che li hanno avuti entrambi ( e che sono stati contati due volte).

**Esempio:** Per determinare se dosi massicce di vitamina C riducono l'incidenza delle malattie da raffreddamento, a mille individui viene somministrata una dose supplementare di vitamina per 1 anno. Nel corso del periodo di osservazione 300 prendono almeno un raffreddore (R), 100 l'influenza (I) e 80 prendono tutti e due. Quante persone hanno preso solo raffreddore, quante solo influenza e quante nessuna delle due? Da questi dati si può dire qualcosa sull'efficacia della vitamina C?

**Soluzione:**

220 persone hanno avuto solo raffreddore, 20 solo influenza e 680 nessuno delle due.

Da questi dati non si può dire niente sulla efficacia o meno della vitamina C nella prevenzione delle malattie da raffreddamento. Per poter dire qualcosa bisognerebbe prendere in considerazione un campione di controllo di persone alle quali il farmaco non è stato somministrato.



(Frank S. Budnick "Applied Mathematics" McGraw-Hill 1986)

**Esercizio 1.-** In una analisi delle preferenze di 1500 consumatori di due prodotti farmaceutici molto usati è stato trovato lo scorso mese che 600 avevano acquistato il prodotto A, 400 il prodotto B, e 150 tutti e due.

- (a) Costruire il diagramma di Venn che riassume i risultati;
- (b) Quanti hanno acquistato solo il prodotto A?
- (c) Quanti hanno acquistato soltanto B.

**Esercizio 2.-** Ricerca sul cancro.

Un gruppo di ricercatori di un Centro Oncologico ha raccolto i dati relativi alla morte di 20000 persone affette da tumore. Dai dati relativi alla storia sanitaria e allo stile di vita di questi individui e dei loro parenti tre variabili significative sembrano poter essere associate alle vittime del cancro: fumo abituale, moderato o forte consumo di alcoolici ed età superiore ai 35 anni. E' stato osservato che:

- 1) 14 500 fumatori abituali (F);
- 2) 12 500 bevitori di alcoolici (B);
- 3) 15 000 avevano età superiore a 35 anni (A);
- 4) 11 000 erano fumatori e bevitori;
- 5) 12 000 erano fumatori con età >35 anni;
- 6) 10 000 erano bevitori con età >35 anni;



7) 10 000 avevano tutte e tre le caratteristiche.

Se  $U$  è l'universo di tutti i pazienti,  $F$  l'insieme dei fumatori,  $B$  quello dei bevitori e  $A$  quello degli "over 35", costruire il diagramma di Venn che mostri tutte le combinazioni possibili di queste caratteristiche.

(Frank S. Budnick "Applied Mathematics" McGraw-Hill 1986)

## II. INSIEMI DI EVENTI

### 1. Il metodo induttivo.

Le scienze matematiche procedono con *metodo deduttivo*, e cioè, applicando i principi tradizionali della logica, si afferma la verità o la falsità di certe proposizioni (*teoremi*), deducendola da altre accettate per vere (*assiomi*) o dimostrate in precedenza (altri teoremi).

Talvolta questo non è possibile. Non si può ad esempio dedurre se un paziente ha o non ha una appendicite dal fatto che lamenta un forte mal di pancia. Potrebbe infatti avere un'ulcera, mal di fegato, una semplice gastrite, oppure potrebbe trattarsi di una persona che simula una malattia. Sarà la nostra esperienza e le ulteriori informazioni (sintomi, analisi) che possiamo eventualmente raccogliere, che ci faranno propendere per questa o quella alternativa.

Questo modo di procedere è quello della *induzione statistica* secondo il quale sulla base dell'osservazione di alcuni dati particolari si può arrivare alla affermazione di una proposizione di carattere generale.

Nella sperimentazione di un nuovo farmaco, questo viene somministrato ad un certo numero di pazienti. Dai risultati riscontrati su ciascun paziente il ricercatore trae delle conclusioni di carattere generale (il farmaco è efficace, è dannoso ecc.) ma queste sono sempre soggette ad un certo grado di incertezza che viene espressa in termini di *probabilità*.

Il metodo induttivo opera su proposizioni il cui oggetto sono manifestazioni del mondo reale. Queste proposizioni prendono il nome di *eventi*.

Def. 1.1. Un evento (o la proposizione che lo traduce) è un ente logico suscettibile di assumere due soli valori: *vero o falso*.

Sono eventi ad esempio: testa nel lancio di una moneta, vittoria di una squadra in una partita o il decesso di un paziente.

La verità o la falsità di un evento non possono essere, di solito, dimostrate con un procedimento logico deduttivo, dimodochè una decisione in tale senso può essere presa solo in base all'esperienza.

Se in base alle informazioni di cui si dispone (dati) si può logicamente dedurre la verità o la falsità di un evento, questo si dirà *certo* ( $\Omega$ ) o rispettivamente *impossibile* ( $\emptyset$ ). Quando dai dati non è possibile dedurre la verità o falsità dell'evento, questo si dice *possibile*.

## 2. Operazioni logiche sugli eventi.

Il signor Rossi viene portato all'ospedale in seguito ad un incidente automobilistico. Ci chiediamo sarà ricoverato nella divisione ortopedica oppure no. Sappiamo che un paziente viene ricoverato nella divisione ortopedica se presenta una frattura, una distorsione o una lesione ai legamenti (strappo muscolare o ai tendini); ma se oltre a una o più di queste lesioni presenta ferite che richiedono un intervento chirurgico, dovrà essere ricoverato nella divisione chirurgica.

Ci troviamo così di fronte all'evento "*il Sig. Rossi viene ricoverato in ortopedica*", sul cui valore logico (Vero oppure Falso) potremo rispondere solo quando sapremo se gli eventi "*presenta una frattura*", "*presenta una distorsione*" e "*presenta ferite che richiedono un intervento chirurgico*" sono veri o falsi.

Si tratta di decidere quando la conoscenza del valore logico di un certo numero di eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  possa farci conoscere il valore logico di un altro evento  $E$ .

Sono necessarie a tale scopo alcune definizioni.

Def. 2.1. Si dice **negazione** di un evento  $E$ , l'evento che è falso se  $E$  è vero, ed è vero se  $E$  è falso.

Se  $E$  è l'evento "il paziente ha preso il farmaco", la sua negazione è "il paziente non ha preso il farmaco".

La negazione di  $E$  si può anche chiamare l'evento complementare di  $E$  e si indica con  $\bar{E}$ .  
Ne consegue che  $\overline{\bar{E}} = E$ .

Def. 2.2. Si dice **somma logica** di due eventi  $E_1, E_2$ , l'evento  $E_1 \vee E_2$  che è vero se almeno uno dei due è vero, ed è falso se sono entrambi falsi.

Dati i due eventi  $E_1$  = "il paziente ha preso il farmaco X",  $E_2$  = "il paziente ha preso il farmaco Y" la somma logica sarà:  $E = E_1 \vee E_2$  = "il paziente ha preso il farmaco X oppure il farmaco Y"

Si ha che  $E \vee E = E$  mentre  $E \vee \bar{E}$  è l'evento certo.

Def. 2.3. Si dice **prodotto logico** di due eventi  $E_1, E_2$ , l'evento  $E_1 \wedge E_2$  che è vero se ambedue gli eventi sono veri.

Se pensiamo ai due eventi  $E_1$  = "il paziente ha preso il farmaco X",  $E_2$  = "il paziente è migliorato" il prodotto logico sarà:  $E = E_1 \wedge E_2$  = "il paziente ha preso il farmaco X ed è migliorato"

Si ha che  $E \wedge E = E$  mentre  $E \wedge \bar{E} = \emptyset$  (evento impossibile).

Le operazioni così definite godono della proprietà commutativa, associativa e distributiva della somma rispetto al prodotto e del prodotto rispetto alla somma.

### 3. Diagrammi di Venn.

Si può stabilire una comoda associazione tra insiemi ed eventi e fra operazioni tra insiemi e quelle tra eventi, facendo corrispondere all'insieme universo l'evento certo, all'insieme complementare l'evento negazione, all'insieme riunione l'evento somma e all'insieme intersezione l'evento prodotto.

Come il complementare dell'insieme universo è l'insieme vuoto, così la negazione dell'evento certo è l'evento impossibile.

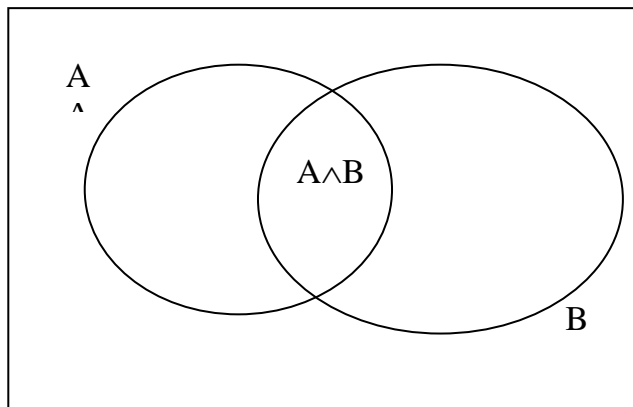


Fig. 5.- Il prodotto logico di due eventi

Due eventi il cui prodotto è falso si dicono *incompatibili*, altrimenti si dicono *compatibili*. Così d'esempio sono incompatibili gli eventi "oggi piove" e "il cielo è sereno".

### 4. Eventi logicamente dipendenti.

Consideriamo un'insieme finito di eventi,  $E_1, E_2, \dots, E_n$  a due a due incompatibili e tali che la loro riunione sia l'evento certo:

- a)  $E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_n = \Omega$  evento certo.
- b)  $E_h \wedge E_k = \emptyset$  evento impossibile se  $h \neq k$ .

Si dice allora che gli  $E_1, E_2, \dots, E_n$  formano una *classe completa di eventi incompatibili* o una partizione dell'evento certo, e gli eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  si dicono *casi elementari possibili o costituenti*.

Th. 4.1. Dati  $n$  eventi qualsiasi,  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , si può sempre costruire una classe completa di eventi incompatibili.

Dim. Basta associare ad ogni evento la sua negazione.

L'evento  $E_1 \vee \bar{E}_1$  è un evento certo, come pure  $E_2 \vee \bar{E}_2$  ecc., e quindi anche  $(E_1 \vee \bar{E}_1) \wedge (E_2 \vee \bar{E}_2) \wedge \dots \wedge (E_n \vee \bar{E}_n) = (E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) \vee \dots \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \dots \wedge \bar{E}_n) = \Omega$  è un evento certo.

Otteniamo così  $2^n$  eventi la cui riunione è certa, e che sono a due a due incompatibili. Alcuni di questi possono essere impossibili, gli altri vengono definiti casi elementari o costituenti la partizione generata dalla famiglia  $E_1, E_2, \dots, E_n$ .

Esempio. Con riferimento al lancio di un dado si considerino tre eventi:

$E_1$  esce un numero  $n$  dispari

$E_2$  esce un numero  $n > 4$

$E_3$  esce un numero  $n \leq 2$

le cui negazioni sono:

$\bar{E}_1$  esce un numero  $n$  pari

$\bar{E}_2$  esce un numero  $n \leq 4$

$\bar{E}_3$  esce un numero  $n > 2$

Procedendo come indicato dal teorema 4.1. otteniamo:

$$(E_1 \vee \bar{E}_1) \wedge (E_2 \vee \bar{E}_2) \wedge (E_3 \vee \bar{E}_3) = (E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3)$$

cioè otto eventi  $A_1, A_2, \dots, A_8$ :

$A_1$  impossibile,  $A_2$  esce il numero 1,  $A_3$  esce il numero 5,  $A_4$  esce il numero 3,  $A_5$  impossibile,  $A_6$  esce il numero 2,  $A_7$  esce il numero 6,  $A_8$  esce il numero 4; che formano una classe completa di eventi incompatibili.

Def. 4.1. Si dice che un evento  $E$  è **logicamente dipendente** da un insieme finito di eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  se dalla verità o falsità degli  $E_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, n$ ) è possibile dedurre la verità o la falsità di  $E$ .

Th. 4.2. Ogni evento logicamente dipendente da una classe completa di eventi incompatibili  $E_1, E_2, \dots, E_n$  è la somma di un certo numero di essi e viceversa ogni somma di un certo numero di  $E_k$  è un evento logicamente dipendente dalla classe assegnata.

Dim. La seconda parte del teorema si dimostra subito ricordando che se un evento  $E$  è somma di un certo numero  $r$  di eventi della famiglia  $E$  :

$$E = E_{k_1} \vee E_{k_2} \vee \dots \vee E_{k_r}$$

sapendo se ognuno degli  $E$  è vero o falso potremo dire se è vero o falso  $E$ .

Viceversa supponiamo che sia  $E$  logicamente dipendente dagli  $\{E_k\}$ ; prendiamo gli eventi della famiglia  $\{E_k\}$  il cui verificarsi comporta il verificarsi di  $E$  (ce ne sono perchè  $E$  è per ipotesi logicamente dipendente dagli  $E_k$ ).

Siano essi  $E_{h_1}, E_{h_2}, \dots, E_{h_s}$ , per definizione di somma logica di eventi segue che:

$$E = E_{h_1} \vee E_{h_2} \vee \dots \vee E_{h_s}$$

Questo evento è vero se almeno uno degli  $E_{h_i}$  è vero, altrimenti è falso.

A questo punto possiamo dare la risposta al problema posto all'inizio del paragrafo 2.

Th. 4.3. Un evento  $E$  logicamente dipendente da  $n$  eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  è la somma dei costituenti della partizione generata dalla famiglia  $\{E_k\}$  e viceversa.

Secondo questo teorema gli eventi  $\{E_k\}$  determinano il valore logico di  $E$  se esso può essere pensato come la riunione dei costituenti della partizione (classe completa di eventi incompatibili) individuata dalla famiglia  $\{E_k\}$ .

## 5. La probabilità.

Rivolgiamo ora la nostra attenzione a quegli eventi che non sono nè certi nè impossibili (e tali sono tutti gli eventi collegati con l'esperienza). A ciascuno di essi noi associeremo un giudizio di attendibilità che ha un carattere del tutto soggettivo e rappresenta il grado di fiducia che *un individuo coerente* ha sul verificarsi di questo evento.

Potremo esprimere questo giudizio con una *misura* (e cioè con un numero come quando si attribuisce un voto ad un candidato quale giudizio su un esame) che chiameremo *probabilità dell'evento E*, e la indicheremo con  $P\{E\}$ .

Per questa misura si dovrà stabilire una scala opportuna.

Di solito si prende  $P\{E\} = 0$  se  $E$  è *impossibile*,  $P\{E\} = 1$  se  $E$  è *certo*, altrimenti  $0 < P\{E\} < 1$  se  $E$  è *possibile*.

La *coerenza* dell'individuo che esprime un giudizio di probabilità potremo definirla dicendo che se  $p$  è la probabilità che si attribuisce all'evento  $E$ , e  $q$  è la probabilità che si attribuisce al suo contrario  $\bar{E}$  (alla sua negazione), dovrà necessariamente essere  $p + q = 1$ , cioè la probabilità dell'evento certo.

Per chiarire il concetto di *coerenza* possiamo pensare la probabilità  $p$  di un evento  $E$  come la quota di scommessa che si è disposti a pagare per ricevere un euro nel caso in cui  $E$  si verifichi. La condizione di coerenza si esprime in questo caso dicendo che  $p$  dovrà essere tale da non assicurare a priori un guadagno certo. Si può dimostrare che le due condizioni di coerenza sono equivalenti.

Infatti il *guadagno aleatorio*  $G$  è dato dalla differenza tra quanto si riceve in caso di vincita  $Q_v$  e quanto si perde  $Q_p$ :  $G = p Q_v - q Q_p$ . Esso sarà nullo se:  $p = q Q_p / Q_v$

Se inoltre si tiene presente che:

Def. 5.1. Due eventi si dicono *equivalenti* se il verificarsi del primo implica il verificarsi del secondo e viceversa.

Risulta spontaneo convenire che a due eventi equivalenti venga assegnata la stessa probabilità.

La condizione di coerenza si può enunciare anche come caso particolare del seguente:

### **Teorema delle probabilità totali:**

Th. 5.1. La probabilità della somma di due eventi è uguale alla somma delle probabilità dei due eventi diminuita della probabilità dell'evento prodotto.

$$P\{E_1 \vee E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\} - P\{E_1 \wedge E_2\}$$

Se  $E_1 = E$  ed  $E_2 = \bar{E}$ , l'evento  $E_1 \vee E_2$  è certo mentre  $E_1 \wedge E_2$  è impossibile:

$$P\{E \wedge \bar{E}\} = 0 \text{ per cui } P\{E\} + P\{\bar{E}\} = 1.$$

Questo teorema è intuitivo se si ricorre alla rappresentazione dei due eventi mediante i diagrammi di Venn.

## **6. Probabilità subordinata.**

In un'urna siano contenute 5 palline, 3 bianche e due nere. Sappiamo che la probabilità di estrarre una pallina bianca è  $3/5$ .

Effettuata l'estrazione (supponiamo che sia uscita proprio una pallina bianca) ci chiediamo quale sia la probabilità che anche la seconda pallina estratta sia bianca, e ci rendiamo conto che la probabilità è stata modificata dal risultato della prima estrazione.

Analogamente ci si può chiedere quale sia la probabilità che un individuo qualunque soffra di cirrosi epatica. Consultando le statistiche nazionali possiamo dare un certo valore di probabilità, ma se su questo individuo veniamo a sapere qualcos'altro (il sesso, l'età, che è astemio, che è di Udine) questa probabilità subirà un cambiamento in conseguenza della nuova informazione.

In generale vi sono sempre delle premesse, nel senso logico della parola, al verificarsi di un certo evento. Quando si vuole mettere in evidenza questo fatto, si dice che **un evento  $E$  è subordinato ad un altro evento  $H$  e si scrive  $E/H$ .**

L'evento  $E/H$  (si legge " **$E$  subordinato ad  $H$** ") potrà essere vero, falso o indefinito. Precisamente:

$$E/H = \begin{cases} \text{vero, se essendo vero } H \text{ è vero anche } E; \\ \text{falso, se essendo } H \text{ vero } E \text{ è falso;} \\ \text{indefinito, se } H \text{ falso.} \end{cases}$$

Ad esempio  $H$  potrebbe essere l'evento "il Sig. Rossi ha avuto un attacco di appendicite" ed  $E$  "Rossi è stato operato d'urgenza". L'evento  $E/H$  sarebbe quindi "avendo avuto un attacco di appendicite, Rossi è stato operato d'urgenza".

E' evidente che se Rossi ha avuto un attacco di appendicite, può essere o non essere stato operato, ma se l'attacco non c'è stato ( $H$  falso) non ha senso operarlo d'urgenza.

L'evento  $H$  si dice evento **ipotesi**, mentre  $E/H$  si dice evento **tesi**.

Se si parla del signor Rossi si può anche dire "è stato operato d'urgenza di appendicite", sottintendendo che ha avuto un attacco di appendicite. Questo ci indica che spesso la

subordinazione è sottointesa, quando ciò non può dar luogo a malintesi. La probabilità dell'evento subordinato viene definita dal seguente:

**Teorema delle probabilità composte o subordinate.**

Th. 6.1. La probabilità del verificarsi simultaneo di due eventi è uguale al prodotto della probabilità dell'uno per la probabilità del secondo, subordinata al verificarsi del primo:

In sintesi

$$P\{E \wedge H\} = P\{H\} \cdot P\{E/H\}$$

inoltre, poichè  $P\{H \wedge E\} = P\{E\} \cdot P\{H/E\}$  possiamo scrivere:

$$P\{H\} P\{E/H\} = P\{E\} P\{H/E\}$$

oppure dividendo entrambi i membri per  $P\{E\} \cdot P\{H\}$

$$\frac{P\{E/H\}}{P\{E\}} = \frac{P\{H/E\}}{P\{H\}}$$

Quest'ultima espressione prende il nome di Teorema di Bayes ed è di fondamentale importanza per la induzione statistica. Infatti il rapporto

$\frac{P\{E/H\}}{P\{E\}}$  può essere  $\frac{>}{<}$  1, e cioè può essere  $P\{E/H\} \frac{>}{<} P\{E\}$ . Se in particolare abbiamo

che  $P\{E/H\} \neq P\{E\}$  significa che il risultato di H aumenta o diminuisce la probabilità che si verifichi E. Si potrà dire cioè che il risultato di H influenza positivamente o negativamente il verificarsi di E e si parlerà di correlazione.

Def. 6.1. Si dice che due eventi E ed H sono **correlati** (positivamente o negativamente) se  $P\{E/H\} \neq P\{E\}$  cioè se sussiste la disequaglianza.

Def. 6.2. Se  $P\{E/H\} = P\{E\}$  si dice che E ed H sono **stokasticamente indipendenti**. In tale caso il teorema delle probabilità subordinate diventa:

$$P\{E \wedge H\} = P\{H\} P\{E\}.$$

**Esempio 6.1.** Consideriamo la probabilità di morte di un paziente dopo un intervento di trapianto renale e costruiamo una classe completa di eventi incompatibili che potranno essere "morte nel primo anno", "morte nel secondo anno",....., "morte dopo nove anni". Supponiamo di aver rilevato i seguenti dati:

1. anno	25.4
2. anno	10.2
3. "	8.4
4. "	3.1
5. "	1.4
6. "	1.1
7. "	1.3
8. "	1.6
9. "	2.1
dopo 9 anni	45.4



Ci domandiamo quale sia la probabilità che un paziente sopravvissuto i primi 3 anni muoia nel quarto. Col teorema delle probabilità subordinate si può scrivere

$$P\{B/A\} = \frac{P\{A \wedge B\}}{P\{A\}}.$$

dove B è l'evento "morte nel 4° anno" ed A l'evento "sopravvive i primi 3 anni". Per cui:

$$P\{A\} = 100 - 25.4 - 10.2 - 8.4 = 56.0\%$$

$$P\{B/A\} = \frac{3.1}{56.00} = 5.53\%$$

**Esempio 6.2.** Supponiamo di avere un farmaco che talvolta da risultati buoni, ma ogni tanto provoca degli effetti secondari di due tipi che chiameremo A e B. Ci si chiede se eliminando l'effetto secondario A si agisce anche sull'effetto B (ci si chiede cioè se i due effetti sono correlati).

Per definire completamente il problema dobbiamo costruirci una classe completa di eventi incompatibili:

$$(A \vee \bar{A}) \wedge (B \vee \bar{B}) = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$$

Quindi o si verificano contemporaneamente A e B o solo A o solo B, oppure il farmaco non provoca effetti secondari:  $\bar{A} \wedge \bar{B}$ .

Dagli esperimenti fatti sappiamo che:  $P\{\bar{A} \wedge \bar{B}\} = 0.90$ ;  $P\{A\} = 0.01$ ;  $P\{B\} = 0.10$ .

Vogliamo vedere se A e B sono correlati o meno e perciò cercheremo di stabilire se  $\frac{P\{A/B\}}{P\{A\}} > 1$ . Calcoliamo quindi  $P\{A/B\}$  che è uguale a  $\frac{P\{A \wedge B\}}{P\{B\}}$  per il teorema delle probabilità composte. Bisogna per ancora calcolare  $P\{A \wedge B\}$  e poichè  $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$  avremo:

$$P\{\bar{A} \wedge \bar{B}\} = P\{\overline{A \vee B}\} = 1 - P\{A \vee B\} = 1 - [P\{A\} + P\{B\} - P\{A \wedge B\}]; \quad \text{per cui}$$

$$0.90 = 1 - 0.01 - 0.1 + P\{A \wedge B\} \text{ da cui si ricava } P\{A \wedge B\} = 1 - 0.9 + 0.01 = 0.1$$

$$P\{A/B\} = 0.01/0.1 = 0.1 > P\{A\} \quad \text{perciò A e B sono correlati positivamente.}$$

## 7. Distribuzioni di probabilità.

Abbiamo già visto che gli eventi riguardanti un certo fenomeno non sono presi in esame singolarmente, ma nel loro insieme considerando un sistema completo di eventi incompatibili  $\Omega$ .

Gli elementi di questo insieme prendono il nome di eventi elementari possibili o costituenti, e ad ognuno di essi possiamo dare un valore di probabilità in modo che la somma delle probabilità sia uguale a 1. In questo caso possiamo dire di avere una **distribuzione di probabilità**. Il modo in cui si possono assegnare queste probabilità dipende dal problema, dal fenomeno in esame e dai dati a disposizione.

Quando ad esempio non si ha un motivo valido per preferire una alternativa alle altre è spontaneo attribuire la stessa probabilità o **peso** a ciascuno degli eventi possibili.

Se  $\Omega$  contiene n elementi la probabilità che noi assegneremo ad ognuno di essi sarà ovviamente  $1/n$ . Questa situazione si dice **equiprobabilità**.

Se  $X$  è un sottoinsieme di  $\Omega$  ( $X \subset \Omega$ ) contenente  $r$  elementi avremo che  $P\{X\} = r/n$ . La forma particolarmente semplice della misura equiprobabile, ne rende molto facile l'applicazione, per cui è molto importante scegliere l'insieme delle possibilità logiche in modo che i singoli eventi elementari siano equiprobabili. In tale caso la probabilità di un certo evento  $X$  verrà ad essere uguale al rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili (**teoria dei giochi**).

Un altro modo di pensare alla probabilità potrebbe essere il seguente: se gettiamo in aria una moneta sappiamo intuitivamente che la probabilità che venga testa è  $1/2$ , se gettiamo un dado la probabilità che venga il numero 5 è  $1/6$ .

Questo significa in realtà che se noi pensiamo di lanciare un dado un grande numero di volte il numero 5 verrà fuori circa  $1/6$  delle volte.

Def. 7.1. Si chiama **frequenza relativa** il rapporto tra il numero di successi  $r$  e il numero totale delle prove  $n$  di un certo esperimento.

Si può dimostrare che:

Th. 7.1. Se il numero delle prove è molto grande la frequenza relativa più probabile è uguale alla probabilità dell'evento (**legge dei grandi numeri**).

Questo teorema ci permette in un certo senso di identificare la probabilità di ciascun evento con la sua frequenza relativa quando non vi sono altre possibilità di giudizio.

## 8. Calcolo combinatorio.

Se abbiamo 50 confezioni di farmaci diversi e in ogni cassetto ce ne possono stare soltanto 10, ci chiediamo in quanti modi possiamo collocarli. A noi potrebbe interessare solo quali farmaci entrano in ogni cassetto oppure anche l'ordine nel quale sono stati archiviati.

Risulta molto utile nel calcolo delle probabilità e in statistica, determinare in quanti modi si possono dividere gli  $n$  elementi  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  di un certo insieme, in gruppi di  $k$  elementi.

Un sottoinsieme formato con  $k$  elementi tra gli  $n$  dati si dirà **di classe  $k$** . Se un elemento potrà essere ripetuto più volte nello stesso gruppo diremo di considerare gruppi con ripetizioni, altrimenti, se gli elementi di un gruppo sono tutti distinti considereremo dei gruppi senza ripetizioni. In seguito ci occuperemo quasi esclusivamente di gruppi del secondo tipo, e li divideremo in due categorie: *disposizioni* e *combinazioni*.

Def. 8.1. diremo **disposizioni** di classe  $k$  di  $n$  oggetti, tutti i gruppi formati con  $k$  degli  $n$  elementi dati e tali che due gruppi differiscono tra loro o per qualche elemento, oppure per l'ordine con cui contengono i medesimi elementi.

Il numero delle disposizioni di classe  $k$  di  $n$  elementi si indica con  $D_{n,k}$ . Per calcolare questo numero cominciamo col supporre  $k = 1$ . In tale caso risulta evidentemente:  $D_{n,1} = n$ . Per ottenere  $D_{n,2}$  basta osservare che le disposizioni di classe 2 si ottengono da quelle di classe 1 facendo seguire a ciascuna di queste, ordinatamente uno dei rimanenti  $n-1$  elementi. Da ciascuna disposizione di classe 1 si ricavano  $n-1$  disposizioni di classe 2 e perciò  $D_{n,2} = n(n-1)$ . Le disposizioni di classe 3 si ottengono analogamente da quelle di

classe 2 facendo seguire a ciascuna di esse uno degli  $n-2$  elementi rimanenti, per cui  $D_{n,3} = n(n-1)(n-2)$ .

Così proseguendo si ricava infine

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

e cioè il numero delle disposizioni di classe  $k$  di  $n$  elementi è dato dal prodotto dei  $k$  numeri interi consecutivi e decrescenti a partire da  $n$ .

Def. 8.2. Si dicono **permutazioni** di  $n$  elementi le disposizioni di classe  $n$  di  $n$  elementi. Esse rappresentano tutte le disposizioni che si possono ottenere in un gruppo di  $n$  elementi facendone variare l'ordine.

Il loro numero si trova dalla formula precedente ponendo  $k = n$ , ed è dato dal prodotto dei primi  $n$  numeri naturali. Esso si chiama **fattoriale di  $n$**  e si scrive  $n!$ . Perciò:

$$P_n = D_{n,n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Notiamo che  $(n+1)! = (n+1)n!$ .

Si pone poi **per convenzione**  $0! = 1$ .

Def. 8.3. Si dicono **combinazioni** di classe  $k$  di  $n$  elementi tutti i gruppi formati con  $k$  degli  $n$  elementi e tali che due gruppi differiscono tra loro per almeno un elemento.

Da questa definizione segue che tutte le disposizioni di classe  $k$  formate con i medesimi  $k$  elementi danno luogo ad una sola combinazione. D'altra parte le disposizioni di classe  $k$  che si possono fare con  $k$  elementi, permutandoli in tutti i modi possibili sono  $k!$ . Ad esse corrisponderà una sola combinazione.

Se indichiamo allora con  $C_{n,k}$  il numero delle combinazioni di classe  $k$  degli  $n$  elementi, ricaviamo  $D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k}$  e quindi  $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$  che si può anche indicare con  $\binom{n}{k}$  e prende

il nome di **coefficiente binomiale**.

I coefficienti binomiali così definiti sono numeri interi.

Si dimostra che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{infatti}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{e anche:}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n - (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Si dimostra inoltre che

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Questa formula ci permette di ottenere  $C_{n,k}$  dati  $C_{n-1,k}$  e  $C_{n-1,k-1}$  e quindi supponendo  $n$  e  $k$  indici di riga e di colonna di una tabella di numeri, possiamo disporre i coefficienti binomiali in un ordine detto Triangolo di Tartaglia. Qui si vede che ciascun elemento è la somma dei due adiacenti della riga precedente.

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
	1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1		

La denominazione di *coefficienti binomiali* di questi termini è venuta in seguito allo sviluppo della potenza n-esima di un binomio proposto da Newton:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

In questa formula che prende il nome di formula di Newton si nota come i termini equidistanti dagli estremi hanno gli stessi coefficienti.

### 9. Classe di una permutazione.

Dati  $n$  elementi si fissi una loro permutazione che si dirà *fondamentale*.

Def. 9.1. Diremo che in una permutazione qualsiasi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  i due elementi  $a_h$  e  $a_k$  **fanno inversione** se si seguono in ordine inverso a quello in cui sono disposti nella fondamentale. Il numero delle coppie di elementi che fanno inversione può essere pari oppure dispari. Nel primo caso la permutazione si dice di **classe pari**; nel secondo di **classe dispari**.

Si può dimostrare che una permutazione cambia classe se in essa si scambiano tra di loro due elementi; e inoltre che delle  $n!$  permutazioni di  $n$  elementi  $n!/2$  sono di classe pari e  $n!/2$  di classe dispari.

### 10. Variabili aleatorie.

Se misuriamo la pressione arteriosa di un certo numero di pazienti otteniamo dei valori diversi per ciascuno di essi. All'evento "pressione arteriosa del paziente X" corrisponde un valore numerico. Analogamente se si misura l'altezza o il peso di un individuo.

In generale, nell'esame di un certo esperimento si definisce un insieme di eventi  $\{E_k\}$ . Se esiste una legge che fa corrispondere un valore numerico  $X(E_k)$  ad ogni elemento di  $\{E_k\}$  si dice che la funzione  $X(E_k)$  è una **variabile aleatoria o numero aleatorio**. Così ad esempio un numero aleatorio la durata espressa in anni della vita di una persona, o il numero dei casi di una malattia denunciati in un certo arco di tempo.

Da ora in poi prenderemo in esame solamente insiemi di eventi sui quali è possibile definire una variabile aleatoria.

Il modo di specificare una variabile aleatoria dipende dal problema in esame e più in particolare dalla possibilità di stabilire una unità di riferimento cui commensurare gli eventi dell'insieme. Se ad esempio stiamo esaminando dei campioni di  $N$  individui scelti da una popolazione per sapere quanti di essi hanno avuto una certa malattia durante l'infanzia, la variabile aleatoria potrebbe essere il numero di persone che rispondono affermativamente (frequenza assoluta) oppure questo numero rapportato a  $N$  (frequenza relativa). Più difficile riesce la definizione di una variabile aleatoria nello studio di altre relazioni, ad esempio tra stato di depressione e infarto del miocardio. In questo caso è necessario stabilire un metodo di giudizio e una scala per misurare lo stato di depressione dei pazienti. In tal senso sono state progettate anche delle scale per misurare l'intelligenza, il dolore, l'ansietà, l'ipocondria ecc..

Sia dunque  $X$  una variabile aleatoria definita su di una classe completa di eventi incompatibili  $\{E_k\}$ .

Se sull'insieme abbiamo definito una distribuzione di probabilità avremo  $P\{E_k\} = \text{Prob}\{X = x_k\}$ . Resta quindi individuata una corrispondenza tra  $X$  e  $P\{E_k\}$ .

Questa corrispondenza è una funzione di cui si può dare una rappresentazione cartesiana.

Spesso una variabile aleatoria può assumere infinite determinazioni, come ad esempio il peso o la statura di una persona, che per praticità vengono suddivise in classi. Sono poi queste classi che vengono considerate come le determinazioni della variabile aleatoria stessa. Alle distribuzioni di variabili di questo tipo è conveniente dare una rappresentazione mediante rettangoli aventi come basi le ampiezze degli intervalli corrispondenti alle singole classi e come altezze le frequenze riscontrate o le probabilità.

Questa rappresentazione prende il nome di *istogramma*.

Si è parlato poco fa di *popolazione* e di *campione* ritenendo intuitivo il significato di questi termini, ma poichè di essi si far ampio uso in seguito è opportuno darne una definizione esatta.

Def. 10.1. Si dice *popolazione* ogni insieme di individui (oppure oggetti) aventi alcune caratteristiche ossevabili comuni.

Def. 10.2. Si dice *campione* un sottoinsieme di una popolazione.

## 11. La distribuzione bernoulliana.

Se si considera un esperimento il cui risultato può essere solamente *successo* o *insuccesso* viene spontaneo introdurre una variabile aleatoria  $x$  che assume valore 1 nel primo caso e 0 nel secondo.

La variabile aleatoria  $x$  e le probabilità  $P\{x = 1\} = p$  e  $q = P\{x = 0\}$  formano una distribuzione di probabilità che prende il nome di *distribuzione bernoulliana*.

## 12. La distribuzione binomiale.

Una qualunque funzione  $Y = \varphi(X)$  di una variabile aleatoria è ancora una variabile aleatoria, come pure la somma di più variabili aleatorie. Si pensi quindi di eseguire l'esperimento precedente, nelle stesse condizioni, un certo numero  $n$  di volte si ottengono  $n$  risultati  $X_1, X_2, \dots, X_n$  il cui valore è 0 oppure 1.

La variabile aleatoria:  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

rappresenta il numero dei successi che si ottengono su  $n$  tentativi. Si può dimostrare che la probabilità di ottenere  $k$  successi su  $n$  tentativi è data dalla formula:

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{dove:} \quad \sum_{k=0}^n p_{n,k} = 1$$

Gli  $n + 1$  eventi  $S_n = k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) e le loro rispettive probabilità  $p_{n,k}$  formano una distribuzione di probabilità che viene detta **distribuzione binomiale**.

## 13. La speranza matematica.

Supponiamo di avere una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria  $X$  le cui determinazioni  $x_1, x_2, \dots, x_n$  si presentano con probabilità  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

La quantità  $x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k = E\{X\}$  prende il nome di **valore medio** o **speranza matematica** della variabile aleatoria  $X$ . Essa dipende da  $X$  e può essere interpretata come il risultato che ci si può aspettare di ottenere in media ripetendo l'esperimento un gran numero di volte.

## 14. Varianza e scarto quadratico medio.

La conoscenza della sola speranza matematica non è sufficiente a descrivere completamente la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria.

Due distribuzioni possono avere la stessa speranza matematica ma valori di probabilità completamente diversi. Se ad esempio si esegue la misura di una grandezza con strumenti diversi, le misure saranno tanto più concentrate attorno al valore medio quanto più lo strumento è preciso. Per avere un'idea di questo fatto importantissimo si cerca una misura della dispersione delle singole determinazioni della variabile aleatoria attorno al suo valore medio. Questa misura viene data dalla quantità.

$$\sigma^2\{X\} = \sum_{k=1}^n (x_k - E\{X\})^2 p_k$$

che viene detta **varianza** della variabile aleatoria  $x$ , oppure dalla sua radice quadrata e che viene detta **scarto quadratico medio** o **scarto standard** o **deviazione standard** di  $x$  dal suo valore medio.

Per la variabile aleatoria bernoulliana si ha:

$$E\{X\} = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

$$\sigma^2\{X\} = q(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = p \cdot q$$

per la distribuzione binomiale se la variabile aleatoria è la frequenza di successo si ha:

$$E\{S_n\} = 0 \binom{n}{0} q^n + 1 \binom{n}{1} p q^{n-1} q + 2 \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} q + \dots + k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \dots \binom{n}{n} p q^n = n \cdot p$$

e analogamente per la varianza si trova :

$$\sigma^2\{S\} = n \cdot p \cdot q$$

Se si considera invece per la distribuzione binomiale la variabile aleatoria frequenza

relativa  $\frac{S_n}{n}$  si trova:  $E\left\{\frac{S_n}{n}\right\} = p$  e  $\sigma^2 = \frac{pq}{n}$ .

Ad esempio supponiamo che la probabilità che nasca un maschio o una femmina siano uguali e sia X il numero di femmine in una famiglia di 4 figli. Per quanto visto sopra si avrà:

$$P\{X=0\} = \frac{1}{16}; P\{X=1\} = \frac{4}{16}; P\{X=2\} = \frac{6}{16}; P\{X=3\} = \frac{4}{16}; P\{X=4\} = \frac{1}{16}.$$

Per cui  $E\{X\} = \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{4}{16} \cdot 1 + \frac{6}{16} \cdot 2 + \frac{4}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = 2 = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{2}$

il numero di femmine che si aspetta di trovare in una famiglia con quattro figli.

### 15. La distribuzione di Poisson.

Durante uno screening di massa, ogni settimana vengono esaminate diverse centinaia di scolari per l'individuazione di una particolare malformazione cardiaca. Ci si chiede quale è la probabilità che in una settimana k individui risultino positivi all'esame. Si potrebbe affrontare il problema per mezzo della distribuzione binomiale, ma questo presenta notevoli difficoltà di calcolo, poichè il numero degli scolari è molto grande e la probabilità di ciascun scolaro di risultare positivo all'esame è molto piccola.

In questa situazione, e poichè la media m degli individui che risultano positivi nelle varie settimane è verosimilmente costante, la distribuzione binomiale assume una nuova forma (n tendente all'∞, p tendente a 0 ed np = m costante)

$$p_k = \frac{m^k \cdot e^{-m}}{k!}$$

che prende il nome di *distribuzione degli eventi rari o di Poisson*.

La speranza matematica e la varianza di questa distribuzione sono uguali:

$$E\{X\} = n \cdot p = m \quad \sigma^2\{X\} = n \cdot p \cdot q = m \cdot (1 - p) = m$$

Si nota come la probabilità di una certa determinazione non dipende nè dal numero delle prove eseguite, nè dalla probabilità di ogni singola prova, ma soltanto dal parametro m.

Una variabile aleatoria si distribuisce secondo la legge di Poisson se:

1) la sua speranza matematica è piccola rispetto al numero massimo di eventi possibili per campione (*eventi rari*). Come ad esempio i casi di gotta denunciati in una città in una settimana.

2) Il verificarsi di un evento non dipende dal verificarsi di un altro evento nello stesso campione (*eventi indipendenti*).

Il fatto che è stato denunciato un caso di gotta non deve influire sulla denuncia dei successi (questo non sarebbe più vero nel caso dell'influenza a causa del contagio).

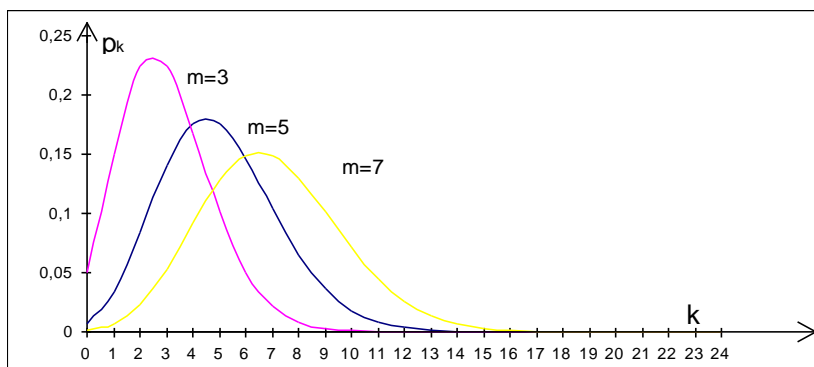


Fig 6. La distribuzione di Poisson dipende dal valore del parametro m.

## 16. Variabili aleatorie continue.

Nella pratica quotidiana, a causa della imperfezione degli strumenti, la precisione delle osservazioni non pu essere aumentata indefinitamente. Per la rappresentazione dei dati quindi si è sempre costretti a suddividerli in classi e perciò una distribuzione di frequenze relative è sempre discreta.

Dal punto di vista teorico ci rendiamo conto molto spesso che la suddivisione in gruppi è arbitraria poichè certe quantità possono variare con continuità e le chiamiamo variabili aleatorie continue.

Per una variabile aleatoria continua X non ci si può chiedere quale sia la probabilità che essa assuma una certa determinazione x ma quale sia la probabilità che X assuma un valore non maggiore di x. Questa quantità dipende da x ed è detta funzione di **ripartizione** della probabilità o **distribuzione** di probabilità:  $F(x) = P\{X \leq x\}$



e rappresenta l'area compresa tra l'asse x e una funzione  $f(x)$ , detta **funzione densità di probabilità**, da  $-\infty$  fino al punto x.

I valori di  $F(x)$  ed  $f(x)$  si trovano già tabulati e quindi se ad esempio vogliamo calcolare la probabilità che x sia compresa tra a e b basta calcolare la differenza:

$$P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a)$$





Se  $\Delta x$  è un intervallo molto piccolo:  $P\{x \leq X \leq x+\Delta x\} = F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x \cdot f(\xi)$  dove  $\xi$  è un punto interno all'intervallo  $(x, x+\Delta x)$  e si avvicina ad  $x$  se  $\Delta x$  tende a zero.

## 17. La distribuzione normale o Gaussiana.

Tra le distribuzioni di probabilità quella che è di gran lunga la più importante è quella che passa sotto il nome di *Distribuzione Normale o di Gauss*.

La sua densità di probabilità per una variabile aleatoria  $x$  di speranza matematica  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Se invece consideriamo la variabile aleatoria  $z = (x - \mu)/\sigma$  di valor medio 0 e varianza 1 essa ha densità di probabilità

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

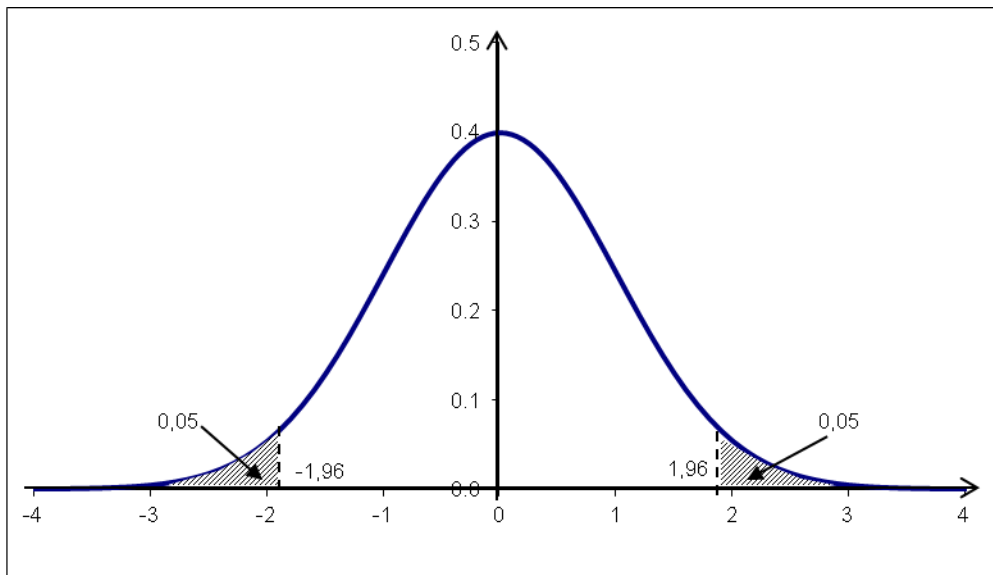
$z$  viene detta *variabile aleatoria standardizzata*.

E' evidente come da qualunque variabile aleatoria se ne può ricavare una standardizzata. E' la distribuzione di questa variabile che noi studiamo potendo estendere le conclusioni a qualunque altra e sono i valori di questa distribuzione che vengono tabulati allo scopo di usarli nelle applicazioni.

Notiamo innanzitutto che la variabile è definita da  $-\infty$  a  $+\infty$ , ha un massimo nell'origine (moda) ed è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

L'area della superficie compresa tra la curva e l'asse delle ascisse è uguale a 1. Se si esamina la tabella della funzione di ripartizione si nota che tra -1 e +1 l'area è 0.6827, tra -2 e +2 è 0.9505 e tra -3 e +3 è 0.9975.

D'altra parte si può anche notare che la probabilità del 95% è compresa tra  $\pm 1.96$  mentre quella del 99% è compresa tra  $\pm 2.58$ .  
Questi semplici risultati saranno usati spesso in seguito.



### III. LA STIMA

#### 1. Stima dei parametri di una distribuzione.

I parametri delle distribuzioni di probabilità delle variabili casuali che intervengono in campo medico sono di solito ignoti.

Sorge quindi il problema di valutarli sulla base di osservazioni effettuate su di un campione.

La stima di un parametro può venir espressa mediante un numero - *stima puntuale* - oppure indicando un intervallo di valori entro il quale con una certa probabilità si trova il parametro in esame - *stima intervallare* -.

#### 2. Stima puntuale.

La stima di un parametro viene calcolata con un insieme di operazioni (operatore) eseguite sui valori del campione.

Di questi operatori ce ne possono esistere diversi per lo stesso parametro, si tratta quindi di scegliere quello più appropriato preferendo un operatore di stima che sia:

a) CORRETTO e cioè tale che la sua speranza matematica sia uguale al corrispondente parametro della popolazione.

b) Più EFFICIENTE di un altro, cioè con varianza più piccola.

c) CONSISTENTE e cioè tale che al tendere all' $\infty$  del numero  $n$  di elementi del campione essa tenda al corrispondente valore del parametro della distribuzione.

La media aritmetica  $\bar{x}$  o media campionaria è una stima corretta, consistente ed efficiente per della speranza matematica. Analogamente si è scelta come stima della varianza la quantità:

$$s^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{con} \quad \bar{x} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}$$

che è una stima corretta e consistente anche se non è la più efficiente. In pratica si usano spesso delle stime inefficienti per comodità di calcolo.

#### 3. Stima intervallare.

La stima puntuale, se l'operatore scelto è buono, ci fornisce un valore che si può considerare vicino al valore del parametro incognito. Questo però non ci dice quanto precisa sia questa approssimazione, si preferisce quindi, in certi problemi, determinare un intervallo nel quale si possa dire che con una certa probabilità si trova il parametro interessato

$$P\{a \leq \mu \leq b\} = \alpha.$$

L'intervallo  $\{a, b\}$  prende il nome di *intervallo di confidenza*,  $\alpha$  di *livello* e  $a$  e  $b$  di *limiti* di confidenza. I limiti  $a$  e  $b$  si possono calcolare facilmente nota che sia la distribuzione della variabile campionaria.

#### 4. Teorema del limite centrale.

La distribuzione della variabile aleatoria **media campionaria**, è approssimativamente normale, indipendentemente dalla forma della distribuzione della popolazione dalla quale vengono prelevati i campioni e se che  $n$  è sufficientemente grande ( $n > 30$ ), la sua speranza matematica è  $\mu$ , la sua varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ .

La **varianza campionaria** ha distribuzione quasi normale per  $n > 100$  con media  $\sigma^2$  e varianza  $\frac{\sigma^2}{2n}$ .

Analoghe proprietà si trovano per la mediana e gli altri parametri come la moda e i percentili.

Questi risultati seguono dal teorema del limite centrale di fondamentale importanza nella teoria statistica.

#### 5. Stima della media di una popolazione.

Analizzando la distribuzione normale si è visto come il 95% della probabilità è compreso tra  $\mu \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  e il 99% tra  $\mu \pm 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Poichè di solito  $\mu$  e  $\sigma^2$  non sono note si usano le loro approssimazioni date dalla media campionaria  $\bar{x}$  e dalla varianza campionaria corretta  $s^2$ .

**Esempio.** Su di un campione di 100 pazienti è stata misurata una certa grandezza. Dall'esame dei dati si ricava una media  $\bar{x} = 67.45$  ed uno scarto standard  $s = 2.93$  cm. Si vuole determinare l'intervallo di confidenza al 95% e al 99% per la media.

a) I limiti di confidenza al 95% sono  $\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  e quindi:

$$67.45 \pm 1.96 \cdot \frac{2.93}{\sqrt{100}} = 67.45 \pm 0.57 \text{ cm.}$$

Perciò l'intervallo di confidenza per la media della popolazione va da 66.88 a 68.02 il che si può scrivere anche  $66.88 \leq \mu \leq 68.02$ .

Si può quindi dire che la probabilità che la media della popolazione cada tra 66.88 e 68.02 è del 95% oppure 0.95 e si scrive in simboli  $P\{66.88 \leq \mu \leq 68.02\} = 0.95$ .

Questo equivale a dire che possiamo avere una fiducia del 95% che la media della popolazione cada tra 66.88 e 68.02.

b) I limiti di confidenza al 99% sono  $\bar{x} \pm 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 67.45 \pm 2.58 \frac{2.93}{\sqrt{100}} = 67.45 \pm 0.76$  cm. Quindi  $P\{66.69 \leq \mu \leq 68.21\} = 0.99$ .

Nell'ottenere questi risultati abbiamo supposto di avere una popolazione di infiniti elementi o talmente grande da poter supporre che il prelevare un campione non alteri le condizioni di probabilità nella popolazione rimanente. Se la popolazione è di  $N_p$  elementi lo scarto quadratico medio  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  va moltiplicato per  $\frac{N_p - N}{N_p - 1}$ .

## 6. Distribuzione campionaria per le frequenze relative.

Si prenda in considerazione una popolazione di infiniti elementi e sia  $p$  la probabilità di successo nell'osservare una certa caratteristica su di un elemento qualsiasi. Si considerino tutti i possibili campioni di ampiezza  $N$  tratti da questa popolazione e si calcoli per ciascuno di essi la distribuzione campionaria delle frequenze relative:

$$\mu_f = p \qquad \sigma_f = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Per valori di  $N$  sufficientemente grandi ( $N > 30$ ) questa distribuzione è con buona approssimazione normale.

Per popolazioni finite anche in questo caso si moltiplica la varianza per il fattore visto nel paragrafo precedente.

## 7. Distribuzione campionaria delle differenze tra i parametri di due campioni.

Date due popolazioni si estragga dalla prima un campione di  $N_1$  elementi sul quale si calcoli il parametro  $S$  che ha una distribuzione di media  $\mu_1$  e scarto standard  $\sigma_1$ . Analogamente dalla seconda popolazione si prende un campione di  $N_2$  elementi, di media  $\mu_2$  e scarto standard  $\sigma_2$ .

Se i due campioni sono indipendenti tra di loro la variabile aleatoria  $S_1 - S_2$  avrà una distribuzione di media:

$$\mu_{s_1-s_2} = \mu_{s_1} - \mu_{s_2} \quad \text{e SQM: } \sigma_{s_1-s_2} = \sqrt{\sigma_{s_1}^2 + \sigma_{s_2}^2}$$

In particolare se  $X_1$  ed  $X_2$  sono le medie campionarie di due popolazioni, la distribuzione della variabile casuale  $X_1 - X_2$  avrà media:

$$\mu_{x_1-x_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} \quad \text{e SQM: } \sigma_{x_1-x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{x_1}^2}{N_1} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{N_2}}$$

Lo stesso risultato vale per popolazioni finite se le estrazioni sono con reinserimento, altrimenti bisogna moltiplicare  $\mu_{x_1-x_2}$  per il solito fattore correttivo.

Se infine  $P_1$  e  $P_2$  sono le frequenze relative campionarie, la distribuzione campionaria delle differenze delle proporzioni è quasi normale con media e scarto quadratico medio:

$$\mu_{p_1-p_2} = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}$$

## IV. REGOLE DI DECISIONE

### 1. Ipotesi e osservazioni.

Se lanciamo in aria una moneta e viene per dieci volte sempre testa, possiamo dire qualcosa sulla probabilità che la moneta sia truccata?

Abbiamo già visto che la probabilità di ottenere  $k$  teste su  $n$  prove è data dalla distribuzione binomiale:  $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

Con una moneta regolare  $p = 1/2$  e perciò la probabilità di ottenere dieci teste è  $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$ .

Perciò dovremmo attenderci di ottenere dieci teste di fila una volta ogni mille tentativi. La prova che abbiamo fatto potrebbe essere proprio quella una su mille, ma il fatto che si sia verificata al primo tentativo ci può far sospettare come più probabile un'altra ipotesi, e cioè quella che la moneta sia truccata.

Supponiamo ora che nei nostri dieci lanci abbiamo ottenuto sette teste e tre croci. Quali conclusioni possiamo trarre sulla regolarità della moneta?

Possiamo applicare lo stesso ragionamento di prima, ma il problema ora è complicato dal fatto che dobbiamo considerare non solo la probabilità di ottenere esattamente sette teste su dieci lanci, ma sette o più.

Se vogliamo usare la probabilità di un evento raro per trarre delle conclusioni, non possiamo ignorare la possibilità del verificarsi di un evento ancora più raro.

Ad esempio se otteniamo dieci teste su dieci lanci di una moneta non è possibile un evento più raro e perciò abbiamo a che fare con una sola probabilità, ma con sette teste su dieci lanci dobbiamo considerare la probabilità di ottenere sette, otto, nove o dieci teste, e dobbiamo sommare queste quattro probabilità per ottenere il valore di cui abbiamo bisogno come base per un giudizio. Per ottenere questo valore dovremmo dunque sommare i singoli termini binomiali, ma questo non è necessario poiché i valori necessari sono stati tabulati e pubblicati dimodochè ci sono tabelle che ci danno la probabilità di ottenere  $k$  o più successi su  $N$  tentativi se la probabilità di successo è  $p = 1/2$ . Da questa tabella ricaviamo che la probabilità di ottenere sette o più teste su dieci lanci di una moneta è 0.172 e cioè circa  $1/6$ . Un evento che si verifica una volta su sei prove non è molto raro e perciò non possiamo trarre alcuna conclusione sulla regolarità o meno della moneta.

### 2. Decisioni Statistiche.

Questi due esempi rispecchiano un problema generale: dalla osservazione di un campione si vuole trovare una conferma o una smentita ad una ipotesi che è stata fatta su di un parametro della popolazione dalla quale è stato tratto il campione.

A tale scopo bisogna stabilire una regola di decisione (test dell'ipotesi) che permette di discriminare in modo univoco tra le due (o talvolta più) alternative.

Perci formulata l'ipotesi  $H_0$  (ipotesi nulla) si calcola la probabilità di presentarsi che avrebbe il campione osservato oppure uno ancora più raro, nel caso in cui tale ipotesi fosse vera. Se questa probabilità è minore di un certo valore prefissato  $\alpha$  detto livello di significatività questa ipotesi viene respinta e viene accettata la sua negazione  $H_1$  (ipotesi alternativa) con un grado di fiducia o livello di confidenza  $1-\alpha$ .

### 3. Errori di decisione.

Nell'applicare una regola di decisione si possono commettere due tipi di errore: rifiutando un'ipotesi che avrebbe dovuto essere accettata (I) oppure accettando un'ipotesi che avrebbe dovuto essere rifiutata (II). Il livello di significatività di un test è la massima probabilità con la quale si vuole rischiare di commettere un errore del primo tipo. Perché una regola di decisione sia buona, essa deve essere concepita in modo da minimizzare gli errori di decisione. Per quelli di prima specie il problema si risolve diminuendo il livello di significatività.

Gli errori di seconda specie sono strettamente correlati con quelli di prima per cui la diminuzione della probabilità di uno provoca l'aumento di quella dell'altro.

Ambedue le probabilità possono essere diminuite solamente aumentando le dimensioni del campione.

Fissate le probabilità dei due tipi di errore si può determinare quanto deve essere grande il campione.

### 4. Regole di decisione e distribuzioni di probabilità.

Se si vuole decidere sulla rarità di un certo evento è necessario riferirsi ad una distribuzione di probabilità.

Perciò i test statistici di uso più frequente si distinguono tra loro per la distribuzione alla quale fanno riferimento: normale, t di Student,  $\chi^2$ , F di Fisher ecc..

Alla fine degli anni quaranta sono stati introdotti dei test che non fanno riferimento ad alcuna distribuzione (test non parametrici) come quella dei ranghi appaiati di Wilcoxon che comunque quando si possono applicare, sono altrettanto affidabili.

### 5. Test basati sulla distribuzione normale.

Trattando delle variabili campionarie si è visto come sotto certe condizioni esse si distribuiscono secondo la legge normale.

Queste riguardano sia le dimensioni del campione che la distribuzione della popolazione dalla quale il campione è stato tratto.

Quando queste condizioni sono soddisfatte si calcola il punto z relativo al campione osservato e se questo cade fuori dell'intervallo di confidenza prefissato l'ipotesi nulla verrà rifiutata. Questo intervallo sarà  $q = \pm 1.96$  se il livello di significatività è di 0.05 e  $q = \pm 2.58$  se esso è di 0.01.

Così ad esempio volendo decidere se un campione di  $n$  misure di valor medio campionario  $X$  proviene da una popolazione di media  $\mu$  e SQM  $\sigma$  si calcola

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Sostituendo eventualmente  $\sigma$  con  $s$ , lo scarto quadratico medio campionario qualora,  $\sigma$  non fosse conosciuto. Analogamente se  $P$  è la percentuale di successi in un campione di probabilità  $p$  si calcola:

$$z = \frac{P - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

In questo modo si possono confrontare le differenze tra due medie o tra due frequenze relative.

Si sappia **ad esempio** che il valor medio della glicemia negli individui sani è di 90 mg% con scarto standard di 24 mg%.

Volendo determinare se questi valori vengono alterati dalla somministrazione di un nuovo farmaco è stato preso un campione di 64 pazienti per i quali è stato calcolato un valor medio di 100 mg% mentre la varianza è rimasta invariata.

Dobbiamo decidere tra le ipotesi

$H_0$   $\mu = 90$  mg% il farmaco non provoca nessun effetto;

$H_1$ :  $\mu \neq 90$  mg% il farmaco provoca un aumento della glicemia.

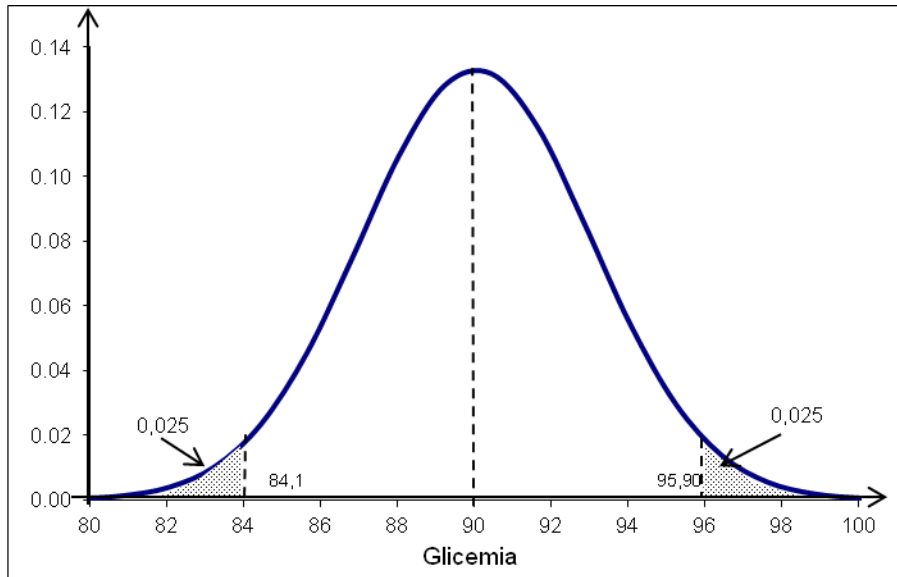


Fig. 10.- Test della glicemia con livello di significatività di 0,05.

Poichè un aumento di glicemia può risultare dannoso si vuole essere sicuri di non commettere un errore di prima specie (accettare  $H_0$  quando è falsa) e perciò si stabilisce un livello di significatività  $\alpha = 0,01$ . Per cui:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - 90}{\frac{24}{\sqrt{64}}} = \frac{100 - 90}{3} = 3,33$$



Essendo questo valore maggiore di 2,58 possiamo concludere che la glicemia è stata sensibilmente alterata ad un livello di confidenza del 99%.

## 6. Test a una coda o a due code.

In questo esempio si è parlato di glicemia "alterata" intendendo così che per effetto del farmaco esso avrebbe potuto sia aumentare che diminuire ( $H_1: \mu \neq 90$ ).

Supponiamo invece che una eventuale diminuzione della glicemia non sia importante, mentre interessa solamente controllare un suo eventuale aumento ( $H_1 > 90$ ).

In questo caso si prenderanno in considerazione solamente i valori di  $z$  positivi per i quali l'evento  $z > 2.33$  si presenta con valore 0.01 di probabilità.

Questo fatto ci fa distinguere tra due tipi diversi di tests, cioè quelli ad una o a due code a seconda che i valori del parametro in esame che si considerano come estremi si distribuiscono su uno solo o su ambedue i lati (code) della distribuzione.

Questo fatto sposta i valori critici del test

livello di signif.	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
val. critici di $z$					
test a 1 coda	1.28	1.65	2.33	2.58	2.88
test a 2 code	1.65	1.96	2.58	2.81	3.08

Come si può vedere dai valori riportati in tabella.

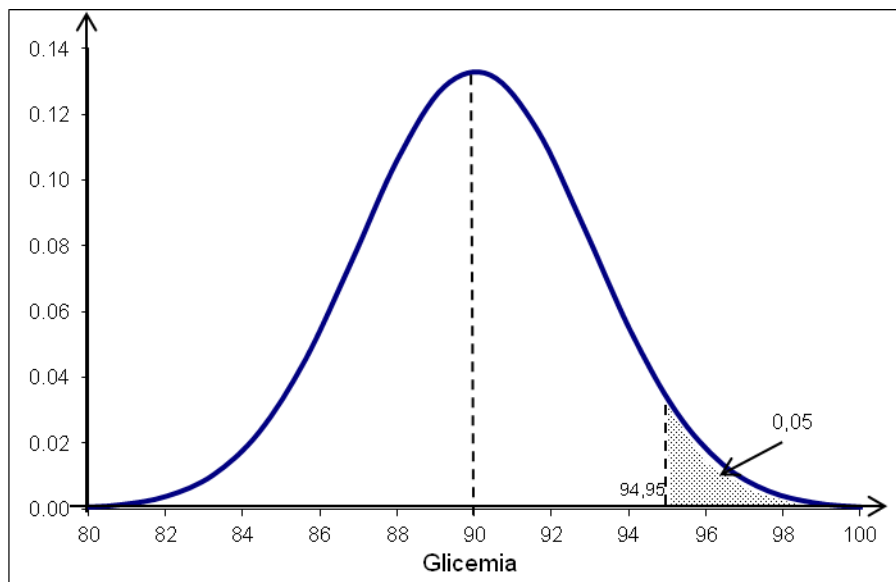


Fig.11.- Test ad una coda sulla distribuzione normale.

Ritornando ora al problema della glicemia si confrontino le due ipotesi:

$$H_0 : \mu = 90 \text{ mg\%}$$

$$H_1 : \mu > 90 \text{ mg\%}$$

Considereremo ora un test ad una coda e perciò accetteremo l'ipotesi  $H_0$  solo se  $z < 2.33$ .

A questo punto si può anche calcolare quale sia il rischio di commettere un errore di seconda specie. Posto infatti:

$$z = 2.33 \text{ si trova } \frac{(\bar{x} - 90)}{3} = 2.33 \text{ da cui si ricava: } \bar{x} = 97.$$

Nell' ipotesi  $H_1: \mu = 100$  invece:  $z = \frac{(97 - 100)}{3} = -1$ . Per cui dalle tabelle si ricava che:  $p = 0.1587$ .

Questa è la probabilità di accettare  $H_0$  quando invece  $H_1$  è vera e cioè quella di accettare come non dannoso il farmaco quando in realtà lo è.

## 7. Teoria dei piccoli campioni.

Nella applicazione del teorema del limite centrale si è detto che le distribuzioni campionarie di alcuni parametri si possono considerare approssimativamente normali quando il campione è *sufficientemente grande*. Questo *sufficientemente grande* è stato tradotto, in generale, in termini numerici con  $n > 30$ . In questo caso, come si è detto, si possono applicare i test basati sulla distribuzione normale.

Questo non è più vero però quando  $n < 30$  e più  $n$  è piccolo più peggiorano le cose. Di conseguenza in questi casi i test saranno basati su altre distribuzioni di probabilità, le quali saranno strettamente legate al numero di osservazioni disponibili o meglio al numero dei gradi di libertà dei test.

## 8. Gradi di libertà.

Il valore di una variabile aleatoria campionaria viene calcolato in base alle osservazioni fatte e in base a certi parametri della distribuzione. Se questi parametri sono incogniti anche essi dovranno essere stimati sulla base dei dati del campione.

Il numero di gradi di libertà di una variabile statistica generalmente indicata con  $v$  viene definito come il numero di osservazioni indipendenti e cioè la dimensione del campione meno il numero  $k$  di parametri della popolazione che devono essere stimati dalle osservazioni del campione:  $v = n - k$ .

## 9. La distribuzione t di Student.

Se si vuole confrontare la media campionaria  $\bar{x}$  con la media della popolazione  $\mu$  si prende in considerazione la variabile aleatoria:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s\sqrt{n-1}} \cong \frac{\bar{x} - \mu}{s\sqrt{n}}$$

dove  $s$  è la varianza campionaria corretta. La funzione di distribuzione di questa variabile aleatoria ha come densità di probabilità

$$f(t, \nu) = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

(dove  $y_0$  è un fattore di normalizzazione) ed è detta **distribuzione *t* di Student**. Essa varia a seconda del numero dei gradi di libertà  $\nu = n-1$ , e per  $\nu$  sufficientemente grande ( $\nu > 30$ ) si avvicina con buona approssimazione alla normale.

I suoi valori comunque si trovano già tabulati (pag. 38) o si possono calcolare con un foglio elettronico.

Il test si applica come nel caso della distribuzione normale: basta calcolare  $t$  con i dati del campione, scegliere il livello di significabilità e determinare i limiti  $t_\alpha$  corrispondenti sulle tabelle in base al numero di gradi di libertà. Se  $t > t_\alpha$ , si rifiuta l'ipotesi  $H_0$  e si accetta l'alternativa.

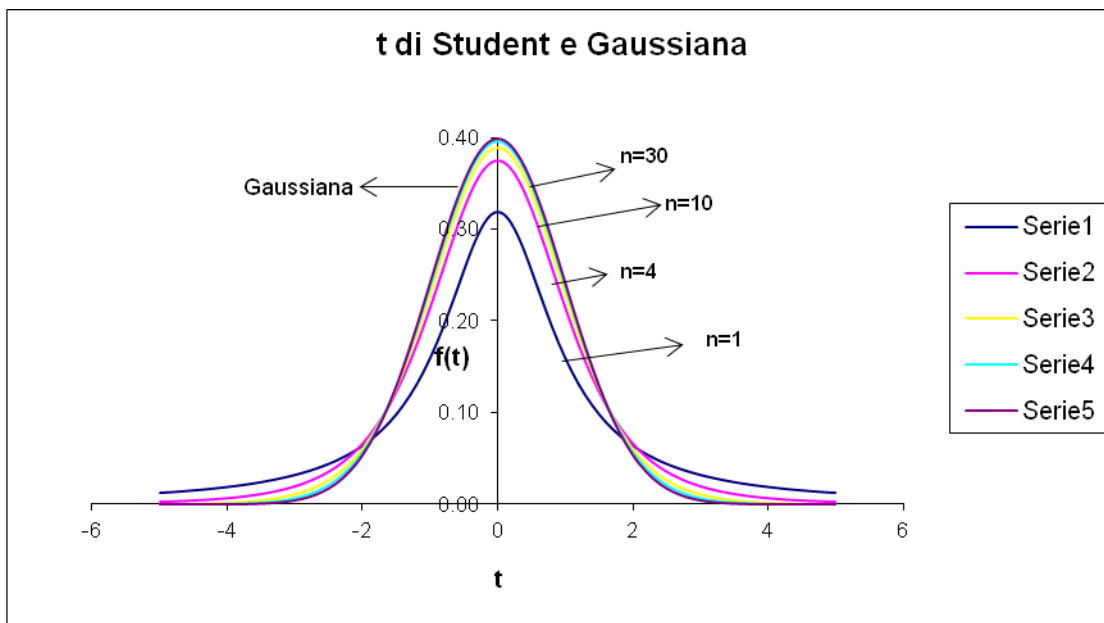


Fig. 12.-Confronto tra le funzioni  $t$  di Student e la Gaussiana

Si voglia determinare se le medie di due campioni di  $N_1$  e  $N_2$  elementi ciascuno sono uguali oppure no.

Si supponga che i due campioni siano stati tratti da popolazioni a distribuzione normale e scarto standard uguale: ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

Siano poi  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  e  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  le medie e gli scarti standard dei due campioni. Sotto queste ipotesi la quantità

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}} \quad \text{dove} \quad \sigma^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}$$

si distribuisce come una  $t$  di Student con  $\nu = N_1 + N_2 - 2$  gradi di libertà.

Anche per il test di Student bisogna distinguere il caso a una o a due code. Ad esempio un reparto clinico vuole esaminare se per effetto di un farmaco si ha un aumento di un

certo parametro ematico. A tale scopo vengono selezionati 24 pazienti in condizioni fisiche verosimilmente uguali e a metà di essi viene somministrato il farmaco. Dopo un periodo di tempo uguale per tutti è stato misurato il valore del parametro  $x$  nei due campioni e il risultato è stato che nel campione di controllo il farmaco si è trovato  $\bar{x} = 4.8$  con scarto standard  $s = 0.4$  mentre nel gruppo che ha ricevuto il farmaco  $\bar{x} = 5.1$  ed  $s = 0.36$ .

Ci si chiede se si può trarre la conclusione che il valore del parametro è aumentato.

Se vogliamo quindi confrontare le due ipotesi

$H_0: \mu_1 = \mu_2$  la differenza è dovuta al caso

$H_1: \mu_1 > \mu_2$  il farmaco incrementa il parametro

Sotto l'ipotesi  $H_0$ :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}} \quad \text{dove} \quad \sigma^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}$$

da cui si trova:

$$\sigma = \sqrt{\frac{12 \cdot 0.40^2 + 12 \cdot 0.36^2}{12 + 12 - 2}} = 0.397 \quad \text{e quindi} \quad t = \frac{5.1 - 4.8}{0.397 \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = 1.85$$

Considerando il test ad una coda soltanto e il livello di significatività 0.01 si deve rifiutare  $H_0$  se  $t$  è maggiore di  $t_{0.99}$  per  $v = N_1 + N_2 - 2 = 22$  gradi di libertà e cioè 2.51. Questo però non è vero e perciò  $H_0$  non può essere rifiutata con una confidenza del 99%.

Se invece si prende  $\alpha = 0.05$  si trova  $t_{0.99} = 1.7$  e quindi si rifiuta  $H_0$  propendendo per l'alternativa.

Questi due fatti portano alla conclusione che l'aumento è probabilmente significativo ma prima di pronunciarsi definitivamente sarebbe meglio effettuare qualche ulteriore esperimento. Abbiamo visto come i campioni (che devono essere sempre indipendenti) possono avere dimensioni diverse.

Si può notare che se gli scarti  $S_1$  ed  $S_2$  sono uguali il campione complessivo  $N_1 + N_2$  è più efficiente quando  $N_1 = N_2$ .

In questo caso infatti si ha un valore minimo per la varianza della variabile aleatoria  $S$ .

## 10. La distribuzione F.

Talvolta è importante confrontare tra di loro le varianze di due campioni di dimensioni diverse per vedere se essi sono stati tratti dalla stessa popolazione di varianza  $\sigma^2$ .

A questo scopo si considera la quantità  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$  rapporto delle varianze campionarie corrette dei due campioni.

Nelle usuali ipotesi che i due campioni siano casuali e indipendenti e che la popolazione dalla quale sono tratti sia normale, la quantità F segue una distribuzione detta F di Fisher.

Questa distribuzione come si può vedere dalle tabelle dipende da due parametri, il numero di gradi di libertà del numeratore e quello del denominatore in corrispondenza dei quali per ogni livello di confidenza si trova il corrispondente valore critico.

Talvolta è necessario operare un confronto fra tre o più campioni. In questo caso c'è la possibilità di confrontarli a due a due, ma ciò non è soddisfacente sia per la lunghezza del calcolo sia dal punto di vista teorico, secondo il quale ci si aspetta un giudizio globale su una ipotesi formulata sull'insieme dei tre campioni. Si apre così un nuovo capitolo della statistica che prende il nome di **analisi della varianza** e che viene trattato in corsi di statistica avanzata.

## 11. La distribuzione del $\chi^2$

Un problema diverso dai precedenti, ma comunque molto frequente è quello di determinare se le frequenze relative  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ottenute da un certo esperimento (frequenze osservate) lasciano pensare che i risultati si distribuiscono secondo una data legge nota (binomiale, normale, ecc.) e di cui si possono calcolare i valori, (frequenze teoriche)  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Un giudizio sulla distanza dei valori osservati da quelli teorici viene data dalla variabile aleatoria

$$\chi^2 = \frac{(f_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(f_2 - e_2)^2}{e_2} + \dots + \frac{(f_n - e_n)^2}{e_n} = \sum_{k=1}^n \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k}$$

la cui distribuzione di probabilità ha densità che si avvicina molto alla funzione:

$$f(\chi^2, \nu) = y_0 \cdot (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

Dove  $y_0$  è ancora un coefficiente di normalizzazione dipendente da  $\nu$ .

Evidentemente se  $\chi^2 = 0$  le frequenze teoriche osservate coincidono perfettamente mentre quando  $\chi^2 > 0$  quanto più grande è il suo valore tanto peggiore è la approssimazione.

Anche in questo caso la distribuzione varia al variare del numero di gradi di libertà.

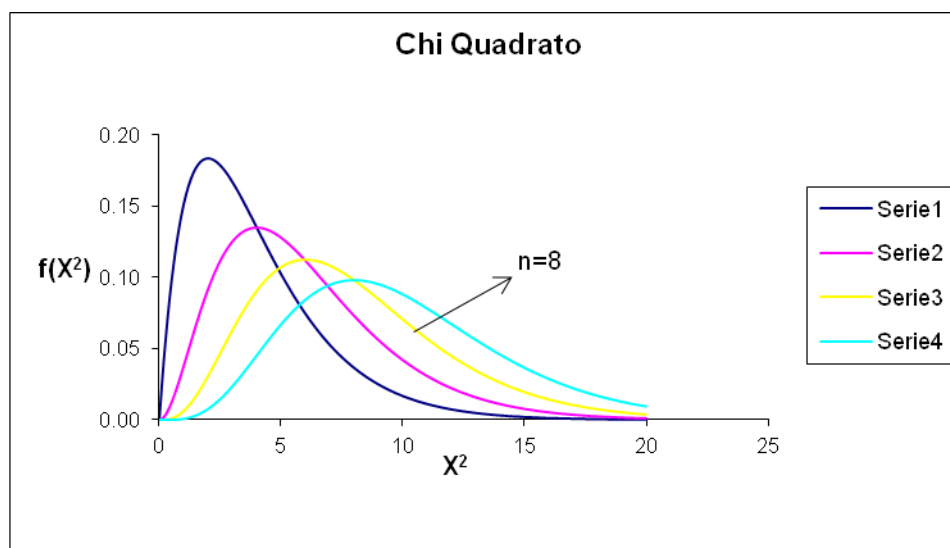


Fig. 13.- La distribuzione del  $\chi^2$  al variare del grado di libertà.

**Esempio.** Durante un'indagine demoscopica si prendono in considerazione 10.000 abitanti di una città e si trovano tra essi 4900 maschi e 5100 femmine. Si vuole determinare se questa differenza è dovuta al campionamento oppure è tale da indicarci che la popolazione non è formata da maschi e femmine in proporzione del 50%.

Si calcola dunque

$$\chi^2 = \frac{(4900 - 5000)^2}{5000} + \frac{(5100 - 5000)^2}{5000} = \frac{20000}{5000} = 4$$

Fissato il livello di significatività  $\alpha = 0,05$  e poichè 1 è il numero di gradi di libertà del test si trova dalle tabelle che è  $\chi^2 > \chi_{0,05}^2$  e quindi la differenza riscontrata non è casuale ma dovuta ad una alterazione della popolazione.

Questa affermazione la possiamo sostenere con il 95% di confidenza.

Altro caso molto frequente di impiego del test  $\chi^2$  è dato dallo studio delle tavole di contingenza che sono state già esaminate nel caso più frequente  $2 \times 2$ , quando si è studiata la correlazione tra sordità e daltomismo.

**Esempio:** Su di un campione di 100 pazienti viene sperimentato un nuovo farmaco mentre su di un gruppo di altri 100 viene continuato il trattamento precedente.

Si vuole sapere in base alle osservazioni effettuate se il nuovo medicamento è più efficace del primo oppure no. E' stato osservato che

	Migliorano	Non migliorano	Totale
Gruppo A	75	25	100
Gruppo B	65	35	100
Totale	140	60	200

In base a questi dati si vogliono confrontare 2 ipotesi  $H_0$  i due farmaci sono equivalenti,  $H_1$  il farmaco A è più efficace del trattamento tradizionale.

Nel caso in cui  $H_0$  fosse vera, ci si aspetterebbe la stessa quantità di guarigioni nei due gruppi per cui

	Migliorano	Non migliorano	Totale
Gruppo A	70	30	100
Gruppo B	70	30	100
Totale	140	60	200

Si può così calcolare il valore del

$$\chi^2 = \frac{(75 - 70)^2}{70} + \frac{(65 - 70)^2}{70} + \frac{(25 - 30)^2}{30} + \frac{(35 - 30)^2}{30} = 2,38$$

Il numero dei gradi di libertà viene dato dal prodotto dei gradi di libertà delle righe e delle colonne  $v = (h - 1)(k - 1)$ . Dalla tabella si trova:  $\chi_{0,05}^2 = 3,84$  e quindi i risultati non sono significativi ad un livello di confidenza del 95%.

Per le tavole di contingenza  $2 \times 2$  appena esaminate vale la pena di dare un metodo rapido per determinare i valori teorici ed il relativo  $\chi^2$ . Su due gruppi di pazienti A e B si sperimentano due trattamenti diversi e si esaminano due reazioni diverse I e II. Ci si chiede se c'è correlazione tra il trattamento e il tipo di reazione.

Dalla tabella delle frequenze osservate si ha:

	I	II	Tot
A	$a_1$	$a_2$	$N_a$
B	$b_1$	$b_2$	$N_b$
Tot	$N_1$	$N_2$	$N$

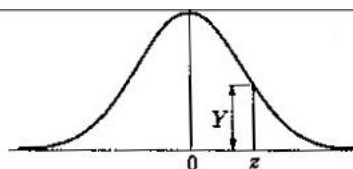
Si può determinare la tabella delle frequenze teoriche nell'ipotesi di indipendenza

	I	II	Tot
A	$\frac{N_1 \cdot N_a}{N}$	$\frac{N_2 \cdot N_a}{N}$	$N_a$
B	$\frac{N_1 \cdot N_b}{N}$	$\frac{N_2 \cdot N_b}{N}$	$N_b$
Tot	$N_1$	$N_2$	$N$

Da cui si trova: 
$$\chi^2 = \frac{N(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2}{N_1 \cdot N_2 \cdot N_a \cdot N_b}.$$

Con i dati dell'esempio precedente si ottiene: 
$$\chi^2 = \frac{200 \cdot (75 \cdot 35 - 65 \cdot 25)^2}{140 \cdot 60 \cdot 100 \cdot 100} = 2,38.$$

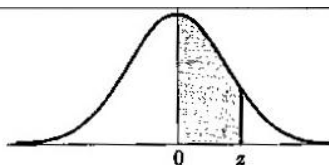
**ORDINATE (Y)**  
della  
**CURVA NORMALE**  
**STANDARDIZZATA**  
in corrispondenza  
dei valori di  $z$



$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0092	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

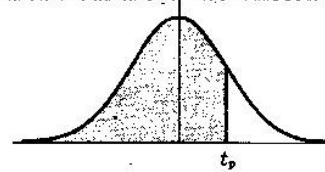


**AREE**  
sotto la  
**CURVA NORMALE**  
**STANDARDIZZATA**  
da 0 a z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

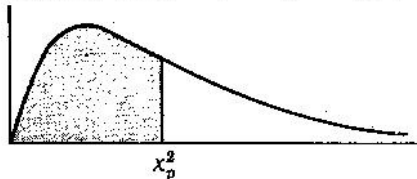
**VALORI DEI PERCENTILI ( $t_p$ )**  
**per la**  
**DISTRIBUZIONE DELLA VARIABILE**  
**CASUALE  $t$  DI STUDENT**  
**con  $\nu$  gradi di libert **  
**(area ombreggiata =  $p$ )**



$\nu$	$t_{0,995}$	$t_{0,99}$	$t_{0,975}$	$t_{0,95}$	$t_{0,90}$	$t_{0,80}$	$t_{0,75}$	$t_{0,70}$	$t_{0,60}$	$t_{0,55}$
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,03	3,36	2,57	2,02	1,48	0,920	0,727	0,559	0,267	0,132
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3,00	2,36	1,90	1,42	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40	0,889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35	0,870	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,77	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,42	2,02	1,68	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2,00	1,67	1,30	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,62	2,36	1,98	1,66	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126
$\infty$	2,58	2,33	1,96	1,645	1,28	0,842	0,674	0,524	0,253	0,126

Fonte: R.A. Fisher e F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (quinta edizione), Tavola III, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, per gentile concessione degli autori e dell'editore.

**VALORI DEI PERCENTILI**  
per la  
**DISTRIBUZIONE DELLA VARIABILE**  
**CASUALE CHI-QUADRATO**  
con  $\nu$  gradi di libertà  
(area ombreggiata =  $p$ )



$\nu$	$\chi^2_{0,995}$	$\chi^2_{0,99}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,90}$	$\chi^2_{0,75}$	$\chi^2_{0,50}$	$\chi^2_{0,25}$	$\chi^2_{0,10}$	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,01}$	$\chi^2_{0,005}$
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,32	0,455	0,102	0,0158	0,0039	0,0010	0,0002	0,0000
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103	0,0506	0,0201	0,0100
3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	1,15	0,831	0,554	0,412
6	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	7,34	5,35	3,45	2,20	1,64	1,24	0,872	0,676
7	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9,04	6,35	4,25	2,83	2,17	1,69	1,24	0,989
8	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,34	5,07	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	11,4	8,34	5,90	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73
10	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,3	7,58	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	14,8	11,3	8,44	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	9,30	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	17,1	13,3	10,2	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	18,2	14,3	11,0	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12,8	10,1	8,67	7,56	6,41	5,70
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	21,6	17,3	13,7	10,9	9,39	8,23	7,01	6,26
19	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	14,6	11,7	10,1	8,91	7,63	6,84
20	40,0	37,6	34,2	31,4	28,4	23,8	19,3	15,5	12,4	10,9	9,59	8,26	7,43
21	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	24,9	20,3	16,3	13,2	11,6	10,3	8,90	8,03
22	42,8	40,3	36,8	33,9	30,8	26,0	21,3	17,2	14,0	12,3	11,0	9,54	8,64
23	44,2	41,6	38,1	35,2	32,0	27,1	22,3	18,1	14,8	13,1	11,7	10,2	9,26
24	45,6	43,0	39,4	36,4	33,2	28,2	23,3	19,0	15,7	13,8	12,4	10,9	9,89
25	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	29,3	24,3	19,9	16,5	14,6	13,1	11,5	10,5
26	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	30,4	25,3	20,8	17,3	15,4	13,8	12,2	11,2
27	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	21,7	18,1	16,2	14,6	12,9	11,8
28	51,0	48,3	44,5	41,3	37,9	32,6	27,3	22,7	18,9	16,9	15,3	13,6	12,5
29	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	33,7	28,3	23,6	19,8	17,7	16,0	14,3	13,1
30	53,7	50,9	47,0	43,8	40,3	34,8	29,3	24,5	20,6	18,5	16,8	15,0	13,8
40	66,8	63,7	59,3	55,8	51,8	45,6	39,3	33,7	29,1	26,5	24,4	22,2	20,7
50	79,5	76,2	71,4	67,5	63,2	56,3	49,3	42,9	37,7	34,8	32,4	29,7	28,0
60	92,0	88,4	83,3	79,1	74,4	67,0	59,3	52,3	46,5	43,2	40,5	37,5	35,5
70	104,2	100,4	95,0	90,5	85,5	77,6	69,3	61,7	55,3	51,7	48,8	45,4	43,3
80	166,3	112,3	106,6	101,9	96,6	88,1	79,3	71,1	64,3	60,4	57,2	53,5	51,2
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98,6	89,3	80,6	73,3	69,1	65,6	61,8	59,2
100	140,2	135,8	129,6	124,3	118,5	109,1	99,3	90,1	82,4	77,9	74,2	70,1	67,3

Fonte: Catherine M. Thompson, *Table of percentage points of the  $\chi^2$  distribution*, Biometrika, Vol. 32 (1941), per gentile concessione dell'autrice e dell'editore.

## V. INSIEMI NUMERICI E COORDINATE CARTESIANE

Nelle scienze matematiche ci si occupa estesamente di **insiemi numerici** ma bisogna indicare sempre chiaramente l'universo dal quale vengono tratti gli elementi e cioè con quale campo di numeri si intende operare.

Si distinguono così l'insieme dei numeri **naturali**  $\mathbf{N}$  (0,1,2,3, .....), i numeri **relativi**  $\mathbf{Z}$  (+1, -1, +2, -2, ....), i numeri **razionali**  $\mathbf{Q}$  (+2/3, -4/5, +1,25, -5,73 .....), i numeri **irrazionali** e **reali**  $\mathbf{R}$  ( $\sqrt{2}$ , 3,14159265....), i numeri **complessi**  $\mathbf{C}$  ( $3 - 2i$ ,  $-2+5i$ , .....). Una trattazione approfondita degli insiemi numerici viene effettuata nei corsi di Algebra.

Pensiamo solamente che un insieme di numeri naturali è dato dai possibili risultati di una prova d'esame (1, 2, ..., 30). La quota sul livello del mare di un punto della superficie terrestre espressa da un orologio subacqueo è un numero relativo (+10, -5). Un altro insieme numerico può essere dato dai valori normali del colesterolo di un individuo sano ( $180,5 < x < 220,8$ mg/l). Questo insieme comprende teoricamente tutti i numeri reali compresi tra i due estremi, anche se al momento del calcolo i numeri reali vengono approssimati con numeri razionali.

### 1. Intervalli.

Insiemi numerici di uso molto comune sono quelli formati da numeri reali, e cioè i sottoinsiemi dell'universo  $\mathfrak{R}$  dei numeri reali.

Def. 1.1. Se  $a$  e  $b$  sono numeri reali con  $a < b$ , chiameremo **intervallo chiuso** da  $a$  a  $b$ , l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra  $a$  e  $b$  inclusi  $a$  e  $b$  stessi; in simboli  $[a,b] = \{x / a \leq x \leq b\}$ .

I valori normali del colesterolo di un paziente sono compresi nell'intervallo  $[180,220]$  mg/l.

I due numeri  $a$  e  $b$  prendono il nome di estremi dell'intervallo, e precisamente  $a$  quello di **estremo inferiore** e  $b$  quello di **estremo superiore** (oppure estremo destro e estremo sinistro).

Def. 1.2. Se nell'insieme non sono inclusi gli estremi, l'intervallo si dirà **aperto** e scriveremo:  $(a,b) = \{x / a < x < b\}$ .

Se nel nostro insieme comprendiamo l'estremo destro e non quello sinistro diremo che l'intervallo è chiuso a destra e aperto a sinistra e viceversa.

L'intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra si indica con  $(a,b]$  e quello chiuso a sinistra e aperto a destra  $[a,b)$ .

Def. 1.3. Un intervallo si dice **limitato** se gli estremi  $a$  e  $b$  sono numeri finiti, si dirà invece **illimitato** se almeno uno dei due estremi coincide con  $\pm\infty$ .

Def. 1.4. Un intervallo  $I$  si dice *limitato superiormente* se esiste un numero  $k$  tale che per ogni  $x \in I$  risulti  $x < k$ .

Nel caso opposto l'insieme  $I$  si dirà *illimitato superiormente*.

In modo analogo si definisce un intervallo limitato o illimitato inferiormente.

Def. 1.5. Se  $a$  è un numero reale qualunque ed  $r$  un numero positivo, definiamo come *intorno* di centro  $a$  e raggio  $s$  l'intervallo aperto  $(a-s, a+s)$  e lo indichiamo con il simbolo  $I_s(a)$ .

Possiamo anche scrivere  $I_s(a) = \{x / |x-a| < s\}$ , e cioè i punti di  $I_s(a)$  sono quelli che si trovano entro una distanza  $s$  da  $a$ .

Def. 1.6. Si dice *punto di accumulazione* di un insieme  $D$  un qualunque punto in ogni intorno del quale cade sempre almeno un punto di  $D$ . (Esso può anche non appartenere all'insieme  $D$ ).

Def. 1.7. L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme  $D$  prende il nome di *insieme derivato* di  $D$ .

## 2. Coppie ordinate e prodotti cartesiani.

Talvolta si vogliono considerare due oggetti come qualcosa di unico e gli diamo il nome di paio o coppia. Ad esempio, se abbiamo l'insieme  $A = \{1,2,3,4\}$  i sottoinsiemi  $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  $\{1,4\}$ ,  $\{2,1\}$ ,  $\{2,2\}$ ,  $\{2,3\}$ ....sono esempi di coppie o paia. I due sottoinsiemi  $\{1,2\}$  e  $\{2,1\}$  sarebbero uguali a meno che non si voglia considerare un elemento come il primo e uno come il secondo; in tale caso la coppia si dirà *ordinata*.

Def. 2.1. Due coppie ordinate  $(a,b)$  e  $(c,d)$  sono uguali se e solo se  $a = c$  e  $b = d$ .

Def. 2.2. Siano  $A$  e  $B$  due insiemi, diremo *prodotto cartesiano di  $A$  e  $B$*  (e lo indicheremo con  $A \times B$ ) l'insieme di tutte le coppie ordinate  $(x, y)$  per le quali  $x \in A$  ed  $y \in B$ .

In simboli  $A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$ .

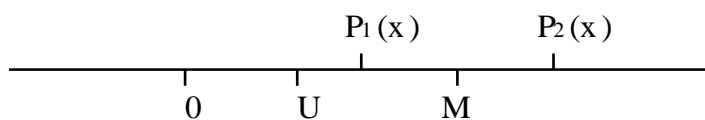
Ad esempio sia  $S = \{a,b,c\}$  e  $T = \{1,2\}$  allora:  $S \times T = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$ . Analogamente se  $A$  è l'insieme dei farmaci della farmacopea ufficiale e  $B$  l'insieme delle patologie riportate in un testo di medicina. L'insieme prodotto sarà dato da tutti gli accoppiamenti tra un farmaco e una patologia.

## 3. Ascisse sulla retta.

Consideriamo una retta  $r$  e su di essa un punto  $O$  che chiamiamo *origine*, fissiamo un verso come positivo e avremo così una retta *orientata*. Prendiamo poi un segmento  $u$  e lo chiamiamo unità di misura. Ad ogni punto  $P$  della retta corrisponde la misura  $x$  del segmento  $OP$  rispetto ad  $u$ .

Il numero  $x$  sarà positivo se  $P$  si trova sulla semiretta positiva, altrimenti sarà negativo.

Viceversa ad ogni numero reale  $x$  corrisponderà un punto  $P$  della retta, tale che la misura della distanza di  $P$  da  $O$  sia uguale a  $x$ . Esiste quindi una corrispondenza biunivoca e continua tra i punti della retta e i numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde uno ed un solo punto della retta e ad ogni punto della retta corrisponde uno ed un solo numero reale.



Def. 3.1. Il rapporto  $\frac{\overline{OP}}{u} = x$  si chiama *ascissa* del punto  $P$ .

La misura della distanza tra due punti  $P_1$  e  $P_2$  è data dal valore assoluto della differenza algebrica tra le ascisse dei due punti:  $d = |x_2 - x_1|$

L'ascissa del punto medio  $M$  è data da:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$

#### 4. Coordinate cartesiane di un punto su di un piano.

Consideriamo due rette orientate, per semplicità perpendicolari tra loro, e introduciamo su di esse due sistemi di ascisse in modo che le origini dei due sistemi coincidano con il punto  $O$  di intersezione delle due rette.

Si dirà così di avere introdotto nel piano un sistema di assi cartesiani, ortogonale e unitario. Se le unità di misura introdotte sui due assi coincidono, il sistema si dice monometrico, altrimenti si dirà dimetrico. L'asse orizzontale prende il nome di *asse delle ascisse*, l'altro quello di *asse delle ordinate*. Preso un punto  $P$  qualunque del piano, le ascisse delle sue proiezioni ortogonali sugli assi cartesiani prendono il nome di *ascissa* e *ordinata* di  $P$  e vengono dette le sue coordinate cartesiane. D'altra parte, data una coppia qualunque di numeri reali, si può sempre trovare sul piano un punto  $P$  (ed uno solo) le cui coordinate siano date da quei due numeri.

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca e continua tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali (ordinate perchè se scambiamo tra loro i due numeri della coppia troviamo in generale un altro punto).

La distanza tra due punti del piano  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  si ricava facilmente per mezzo del teorema di Pitagora:

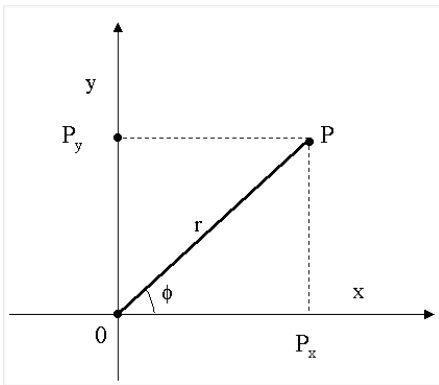
$$d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_1C}^2 + \overline{P_2C}^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Le coordinate del punto medio del segmento  $\overline{P_1P_2}$  sono date da:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

## 5. Coordinate Polari

Le coordinate cartesiane non sono l'unico modo per rappresentare un punto P del piano. La sua posizione viene individuata in modo univoco dalla sua distanza  $r$  da un punto O detto origine e dall'angolo  $\alpha$  (angolo polare) che il segmento PO forma con una semiretta orientata uscente dall'origine detta asse polare. I valori di  $r$  sono sempre positivi ed  $\alpha$  varia tra  $0$  e  $360^\circ$  oppure in radianti tra  $0$  e  $2\pi$ . Se si fa coincidere l'asse polare con l'asse delle ascisse di un sistema cartesiano di riferimento si possono trovare le formule di passaggio tra coordinate cartesiane e coordinate polari (a). E viceversa da coordinate polari in cartesiane (b).



$$\begin{cases} x = r \cos\Phi \\ y = r \sin\Phi \end{cases} \quad b)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Phi = \text{atn}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad a)$$

## 6. Coordinate cartesiane di un punto nello spazio.

Consideriamo tre rette nello spazio perpendicolari tra loro e incidenti in un punto O origine di un sistema di ascisse su ciascuna di esse. Esse formano un sistema di assi cartesiani nello spazio. Le proiezioni di un punto qualunque P dello spazio su ciascuno degli assi individua una terna di numeri reali che prendono il nome di coordinate cartesiane del punto P.

Nello spazio la distanza tra due punti  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  è data da:

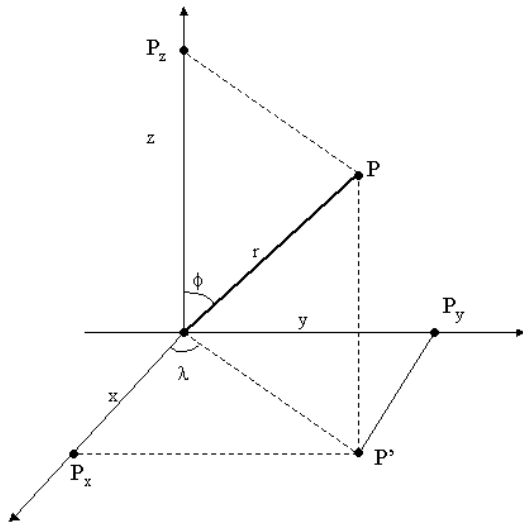
$$d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_1C}^2 + \overline{P_2C}^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Le coordinate del punto medio M del segmento  $P_1P_2$  sono date da:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

## Coordinate sferiche e cilindriche.

Anche nello spazio si possono definire delle coordinate che permettano di descrivere meglio problemi a simmetria centrale. Un esempio di queste sono le **coordinate sferiche** mediante le quali un punto dello spazio viene individuato da due angoli  $\varphi$  e  $\lambda$  e dalla sua distanza dall'origine.



Con le formule:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

si può passare dalle coordinate sferiche alle cartesiane.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \operatorname{atn}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \lambda = \operatorname{atn}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Le **coordinate cilindriche** invece individuano un punto mediante due coordinate piane ( $x, y$ ) e l'angolo  $\varphi$  formato dal segmento PO con l'asse z detto **distanza zenitale**.

### Esercizi:

- 1) Calcolare la distanza tra due punti del piano  $P(-1, 3)$ ,  $Q(2, -1)$ .
- 2) Calcolare la distanza di due punti dello spazio  $P(-1, 3, 1)$ ,  $Q(2, -1, 2)$ . Trovare le coordinate del punto medio del segmento PQ.
- 3) Trasformare le coordinate cartesiane dei punti P e Q in coordinate polari.



## VI. LE FUNZIONI

### 1. Relazioni.

In tutti i campi della scienza si nota l'esistenza di coppie di insiemi tra i quali si possono individuare, o talvolta solamente intuire dei legami. Si sa ad esempio che esiste un legame tra gli stimoli e le reazioni che si ottengono da un certo organo, tra l'insieme di tutte le patologie e quello dei farmaci, tra i valori della pressione e quelli del volume di una certa massa di gas, ecc..

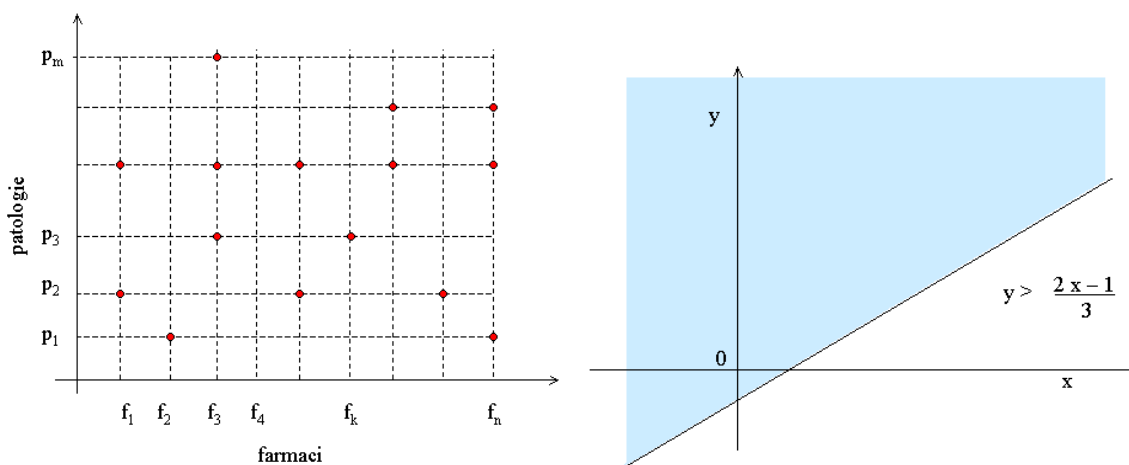
Esaminando in particolare il secondo esempio si consideri l'insieme P di tutte le patologie, quello F di tutti i farmaci conosciuti e il loro prodotto cartesiano:

$$P \times F = \{(p,f) / p \in P \wedge f \in F\}.$$

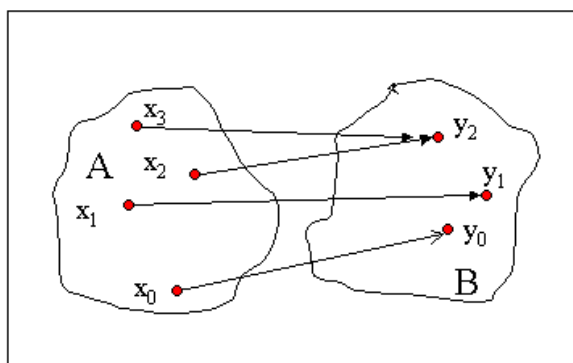
Se si considerano tutte le coppie formate da una patologia e da un farmaco *indicato per il suo trattamento*, si trova un sottoinsieme C dell'insieme prodotto, che viene detto *relazione* dell'insieme  $P \times F$ .

Una relazione viene spesso determinata da una formula matematica, come ad esempio  $x^2 + y^2 = 4$  oppure  $2x - 3y \leq 1$  che sono soddisfatte, la prima da coppie di numeri reali corrispondenti a punti del piano che stanno su di una circonferenza di raggio 2:

$$S = \{(x,y) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 4\};$$



la seconda su di un semipiano:  $T = \{(x, y) / 2x - 3y \leq 1\}$



Def. 1.1. In generale una *relazione* tra due insiemi A e B è un qualunque sottoinsieme del loro prodotto cartesiano  $A \times B$ .

## 2. Funzioni.

Una relazione di tipo particolare sussiste tra i pazienti di un ospedale e le loro cartelle cliniche. In questa relazione ad ogni cartella clinica  $x$  corrisponde un solo paziente  $y$  per cui data una cartella clinica si può risalire senza possibilità di errore al suo intestatario in base al codice della tessera sanitaria.

Una relazione, secondo la quale ad ogni elemento del primo insieme resta associato un solo elemento del secondo viene detta *mappa o funzione*. Si sa che un paziente ha, in ogni istante un ben definito valore di temperatura e che la velocità di un corpo lasciato cadere liberamente nel vuoto dipende dal tempo trascorso dall'istante nel quale è stato lasciato cadere.

Se si ha un insieme di numeri  $D = \{2, 3, 5, 7\}$  e si eleva al quadrato ciascuno di essi si ottiene un altro insieme  $C = \{4, 9, 25, 49\}$ .

In tutti questi casi ci si trova di fronte ad una coppia di quantità misurabili una delle quali  $y$  si può ritenere dipendente dall'altra  $x$  e si dice che la prima è funzione della seconda pur non implicando necessariamente un concetto di causalità.

L'insieme D dei valori della variabile indipendente  $x$  è detto il *dominio* o *campo di definizione* della funzione e l'insieme C dei loro corrispondenti è detto il *codominio* della funzione stessa.

In conclusione per definire una funzione sono necessari due insiemi D e C e una legge di corrispondenza che ad ogni elemento del dominio D associ un solo elemento del codominio C.

Si può ora dare la seguente definizione:

Def. 2.1. Una **funzione** consiste di un insieme D detto il dominio della funzione ed *una legge di corrispondenza* che associa ad ogni elemento di D uno ed un solo elemento di un secondo insieme C, detto codominio della funzione.

Il codominio è un insieme tale che ciascuno dei suoi elementi è il corrispondente di uno o più elementi del dominio.

## 3. Successioni e Serie

Il dominio S di una funzione può essere un qualunque insieme numerico. In generale considereremo delle funzioni definite su insiemi di numeri reali ( $S \in \mathbb{R}$ ). Se il dominio è l'insieme dei numeri naturali N o un suo sott'insieme la funzione prende il nome di *successione* e viene indicata con l'elenco dei suoi termini  $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots, f_n, \dots$ .

Le successioni possono avere un numero finito o infinito di termini e sono individuate dal loro **termine generale**. Abbiamo già visto esempi di successioni nell'esame delle distribuzioni di probabilità.

La distribuzione binomiale ad esempio da luogo ad una successione di  $n$  termini, il cui termine generale è:  $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$ . La distribuzione di Poisson si presenta

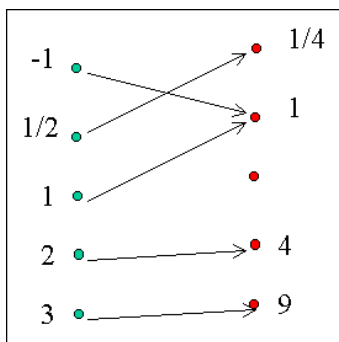
come una successione di infiniti termini:  $p_k = \frac{m^k \cdot e^{-m}}{k!}$ . Abbiamo visto anche la

$$f_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Altre successioni possono essere quella **geometrica**,  $g_k = a^k$  oppure la  $r_k = 1/k$ . Se all'aumentare di  $k$  la successione si avvicina sempre di più ad un numero finito  $l$  si dice che essa è **convergente** ad  $l$ . Così la  $f_k$  è convergente al numero di Nepero  $e=2.718281828\dots$

La somma dei termini di una successione:  $f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots + f_n + \dots$  viene detta **serie** relativa alla successione stessa, mentre la somma dei primi  $n$  termini viene detta **somma parziale** o **ridotta  $n$ -esima** della serie.

#### 4. Rappresentazione di una funzione.



Una funzione può essere rappresentata in diversi modi. Un modo molto semplice sarebbe quello di considerare gli elementi del dominio e quelli del codominio come dei punti del piano e portare delle frecce per indicare la corrispondenza tra due elementi:

Questa corrispondenza viene spesso indicata con una formula, ad esempio se  $x$  è un elemento del dominio e  $y$  il corrispondente del codominio, per il quadrato si può

scrivere:  $y = x^2$ .

Di solito una funzione si indica con una lettera come  **$f, g, p, q$** . Se  $f$  è la funzione che opera su  $x$  per dare  $y$  si scrive  $x: \rightarrow f(x)$  oppure  $y = f(x)$  ed  $x$  viene detta la variabile indipendente, mentre  $y$  la variabile dipendente.

Un altro modo spesso usato per rappresentare una funzione è quello di formare una tabella con due righe e due colonne. Per la funzione  $x^2$  ad esempio:

dominio	2	3	5	7
codominio	4	9	25	49

Una funzione viene spesso espressa dalla legge che permette di individuare ciascun elemento del codominio dato il corrispondente elemento del dominio ( $y = x^2$ ).

Si può anche rappresentare una funzione con un insieme di coppie ordinate:

$$\{(2,4), (3,9), (5,25), (7,49)\}.$$

Da questa si può giungere ad un'ulteriore rappresentazione (questa volta geometrica) delle funzioni; è la rappresentazione usata più di frequente. Infatti sappiamo che una coppia ordinata di numeri reali può essere rappresentata come un punto in un sistema di coordinate cartesiane sul piano, e perciò è ragionevole rappresentare graficamente una funzione per mezzo di un insieme di punti del piano. Per tradizione si prende il dominio della funzione sull'asse orizzontale, e il codominio sull'asse verticale. Questa rappresentazione la chiameremo **grafico cartesiano** della funzione. Essa è costituita da un sottoinsieme del prodotto cartesiano dei due insiemi D e C.

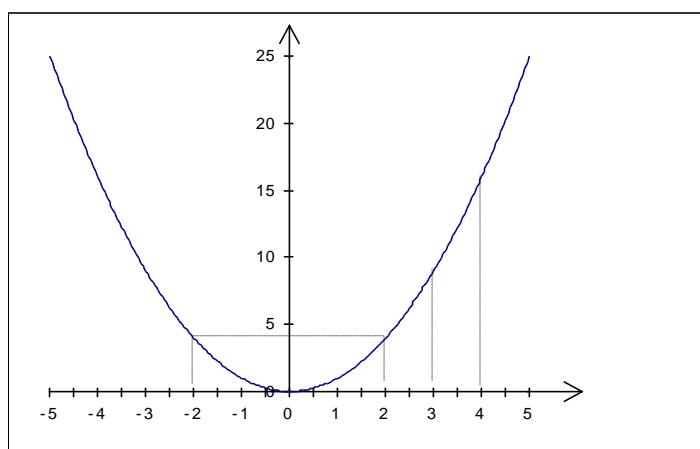
Se  $x$  è un elemento del dominio, l'elemento del codominio della funzione  $g$  corrispondente a  $x$  si indica con  $g(x)$ .

Questo elemento viene spesso detto l'**immagine** di  $x$ . Se consideriamo un'insieme  $S \subseteq D$ , l'insieme degli elementi del codominio, immagine di tutti gli elementi di S si dirà immagine di S e si indicherà con  $g(S)$ . Noi generalmente consideriamo il codominio come l'immagine del dominio. Se  $g(S) = C$  la funzione, o **mappa** si dice **suriettiva**. Se comunque presi due punti del dominio,  $x_1 \neq x_2$ , si ha che  $f(x_1) \neq f(x_2)$  la funzione si dice **iniettiva**.

Una classe importante di funzioni ha la proprietà che ogni elemento del codominio è l'immagine di uno ed uno solo elemento del dominio. Questo avviene quando la funzione è iniettiva e suriettiva. Una tale funzione si dice **biiettiva**.

Una funzione biiettiva si dice anche **biunivoca** come biunivoca è la corrispondenza che essa stabilisce tra gli elementi del dominio e del codominio.

Abbiamo visto come si introduce un sistema di assi cartesiani nel piano. Supponiamo ora di avere la funzione  $y = x^2$  già vista.



$x$	$x^2$
$\pm 1$	1
$\pm 2$	4
$\pm \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\pm \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$\pm \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Per ottenere la sua rappresentazione cartesiana in un intorno dell'origine, calcoliamo la funzione per alcuni valori di  $x$  e segniamo i punti corrispondenti sul piano. Infine congiungiamo questi punti con una linea continua e otteniamo il grafico della funzione.

Una funzione avente come dominio e codominio due insiemi di numeri reali si dirà **funzione reale**. La funzione reale data dalla formula:

$$y = mx + q \quad (\text{con } m \text{ e } q \text{ reali qualunque})$$

avrà sempre come grafico una linea retta e perciò viene detta **funzione lineare**. Sono funzioni di questo tipo:  $f(x) = 3x - 2$ ,  $f(x) = 2$ ,  $f(x) = -2x$ .

Un rappresentante di prodotti farmaceutici riceve come retribuzione 700 Euro mensili più 5 Euro per ogni confezione di un certo prodotto venduta nella sua zona in quel mese.

Il suo guadagno sarà quindi:  $y = 5q + 700$  (dove  $q$  è la quantità venduta).

Def. 2.1. Si dice **pendenza** di una retta la tangente trigonometrica dell'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse.

Basta prendere in considerazione due punti qualunque di una retta  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  e troveremo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad \text{Per le rette viste sopra, le pendenze sono rispettivamente: } 3, 0, -2.$$

Nello stipendio del rappresentante, la pendenza è rappresentata dall'importo che gli viene riconosciuto per unità di prodotto venduto.

Def. 2.2. Si dice **campo di definizione** di una funzione l'insieme dei valori della variabile indipendente per i quali la funzione è reale, oppure (o inoltre) ha senso studiare il problema in esame.

Il **campo di definizione** di una funzione dipende dalla struttura della funzione e dal problema da cui essa proviene. Salvo avviso contrario, in seguito useremo i termini campo di definizione e dominio come sinonimi.

## 5. Operazioni algebriche tra funzioni

Se due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  sono definite sullo stesso insieme  $D$  possiamo costruire delle nuove funzioni applicando tra  $f$  e  $g$  le quattro operazioni algebriche:

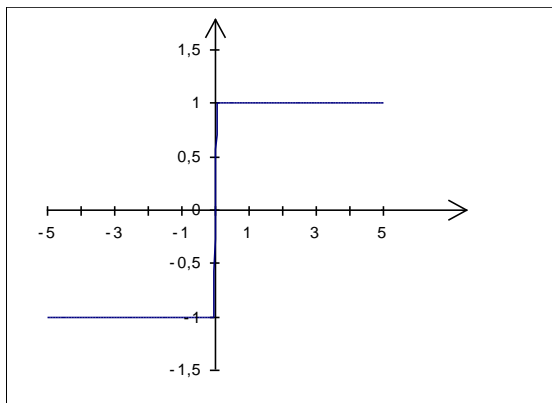
$$f(x)+g(x); \quad f(x)-g(x); \quad f(x)\times g(x); \quad f(x)/g(x).$$

Queste nuove funzioni saranno ancora tutte definite su  $D$  tranne l'ultima che non risulterà definita nei punti in cui  $g(x)$  si annulla. Quanto detto si può estendere facilmente al caso in cui  $f$  e  $g$  non hanno lo stesso dominio. Se i domini delle due funzioni sono  $D_f$  e  $D_g$  il dominio delle prime tre nuove funzioni sarà l'intersezione  $D_f \cap D_g$ ; per la quarta ( $f/g$ ) dovremo escludere i punti in cui  $g(x) \neq 0$ .

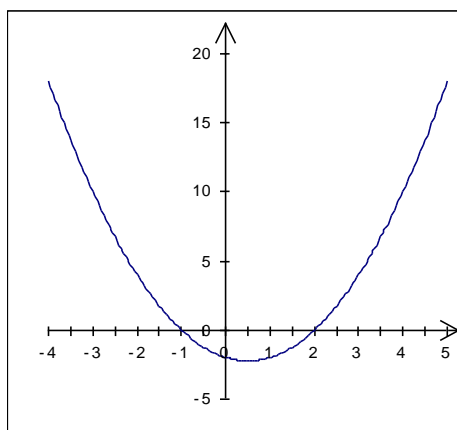
**Esempi.** Tracciamo il grafico di alcune semplici funzioni:

a) Funzione gradino:

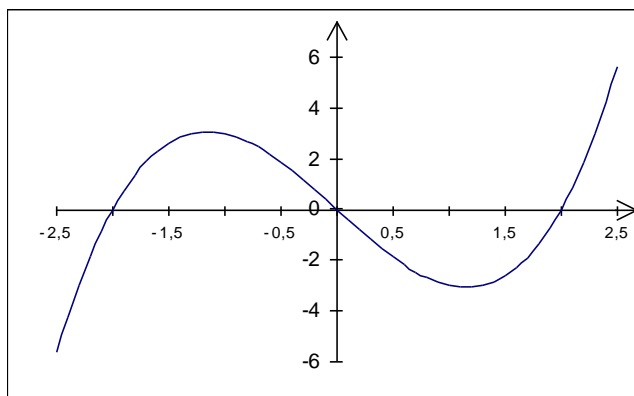
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$



b) Funzione quadratica:  $g(x) = x^2 + 6x - 2$



c) Funzione cubica:  $h(x) = x(x + 2)(x - 2)$



d) Iperbole equilatera:  $k(x) = \frac{x-1}{x-2}$  per  $x \neq 2$

La funzione lineare  $y = mx + q$  (con  $m$  e  $q$  reali) è definita su tutto l'asse reale, cioè per qualunque valore reale di  $x$ ; questo succede anche per tutte le funzioni polinomiali a coefficienti reali che sono formate dalla somma e dal prodotto di più funzioni lineari.

Def. 4.1. Una funzione la cui formula è espressa dal rapporto di due polinomi si dice **funzione razionale**.

Una funzione razionale è definita per tutti i valori di  $x$  tranne quelli, se ve ne sono, che annullano il denominatore.

Consideriamo ad esempio la funzione  $W(t) = (t - 2)/(t - 5)$ . Il numeratore si annulla per  $t = 2$  e il denominatore per  $t = 5$ .

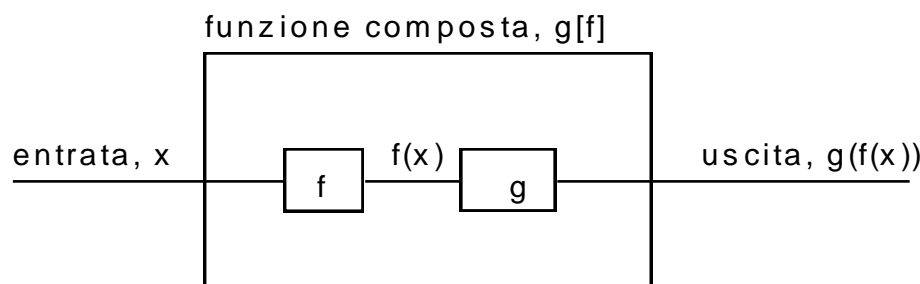
La funzione  $W(t)$  non è quindi definita per  $t = 5$  e questo punto viene detto **polo** della funzione. Se  $t$  assume valori molto prossimi a 5 ma minori di esso, la funzione assume valori molto grandi ma negativi. Si dice allora che  $W(t)$  **diverge** negativamente. Così quando  $t$  si avvicina a 5 assumendo valori maggiori di esso, la funzione assume valori sempre più grandi e positivi. Si dice allora che la funzione diverge positivamente.

In questi casi si dice che il grafico della funzione si avvicina asintoticamente alla retta  $t = 5$  che viene detta **asintoto verticale**.

## 6. Funzioni composte.

E' spesso utile pensare una funzione  $f$  come un operatore che può essere applicato ad un numero  $x$  del suo dominio per ottenere il numero  $f(x)$  del suo codominio. Il numero "in entrata"  $x$  viene trasformato nel numero "in uscita"  $f(x)$  della funzione  $f$ .

Supponiamo che il numero "in uscita"  $f(x)$  appartenga al dominio di un'altra funzione  $g$ . Allora  $g$  può operare su  $f(x)$  per produrre un nuovo numero "in uscita"  $g[f(x)]$ . L'effetto su  $x$  delle due funzioni successive nell'ordine assegnato è una nuova funzione che scriveremo in simboli  $g[f]$ . Possiamo rappresentare questa situazione in modo schematico:



□

Def. 6.1. La funzione  $g[f]$  ottenuta dalla successiva applicazione di  $f$  e  $g$  nell'ordine viene detta la **funzione composta**  $g$  di  $f$ .

Abbiamo già detto che in generale le funzioni hanno come dominio e codominio dei sottoinsiemi di numeri reali. Noi ci occuperemo solamente di questo tipo di funzioni che chiameremo funzioni reali.

Il concetto di funzione composta si può facilmente estendere al caso in cui il codominio della prima funzione non sia completamente contenuto nel dominio della seconda. In tale caso la funzione  $g[f]$  ha come dominio l'insieme dei punti  $x$  di  $D_f$  per cui  $f(x)$  appartiene al dominio  $D_g$  della funzione  $g$ , cioè all'intersezione tra  $D_g$  e l'immagine di  $D_f$ .

Di questi punti potrebbe anche non essercene nessuno, nel qual caso il dominio della  $g[f]$  sarà l'insieme vuoto, e così pure il codominio.

Ad esempio il campo di definizione della funzione  $f_1(x) = \sqrt{x-2}$  è  $x \geq 2$ . Quello della funzione  $f_2(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$  è  $x < 2$  ed  $x > 3$ . La funzione  $f_3(x) = \sqrt{x(4-x)}$  è definita per  $0 \leq x \leq 4$ . Notiamo che una funzione composta da due funzioni lineari è ancora una funzione lineare.

## 7. Funzione inversa.

Se il rappresentante di prodotti farmaceutici si domanda quante confezioni deve vendere per guadagnare 1500 Euro al mese bisogna esplicitare la funzione del ricavo rispetto a  $q$  (quantità venduta):

$$q = \frac{1500 - 700}{5} = 160.$$

In generale ad una funzione biunivoca possiamo associare una seconda funzione che chiameremo *inversa*. Nella rappresentazione grafica che abbiamo dato per prima alle funzioni si individua la funzione inversa semplicemente invertendo il verso delle frecce. In generale, se una funzione ci fa passare da un certo insieme di punti del dominio  $D$  ad un insieme di  $R$ , sotto quali condizioni è possibile trovare una seconda funzione che faccia alla rovescia il lavoro della prima? Questo è possibile se la prima funzione è una funzione biunivoca. Nell'esempio delle frecce notiamo infatti che se la funzione è biunivoca in ciascun punto di  $R$  arriverà una sola freccia e quindi basterà invertire il verso delle frecce per ottenere la funzione inversa  $f^{-1}$ .

Def. 7.1. Una funzione che applicata ad un numero  $x$  qualunque di un insieme  $D$  lo lascia invariato ( $f(x) = x$ ) si dice **funzione identità**.

Def. 7.2. Se  $f$  è una funzione biunivoca di dominio  $D$  e codominio  $R$ , allora l'insieme  $f^{-1} = \{(y,x) / (x,y) \in f\}$  è una funzione che chiameremo **funzione inversa** e ha come dominio  $R$  e codominio  $D$ .

La funzione composta di una funzione biunivoca  $f$  e della sua inversa  $f^{-1}$  ci dà:  $f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$  oppure  $f[f^{-1}(y)] = y$  e cioè una funzione identità.

Consideriamo ad esempio la funzione  $y = 3x + 2$ . Si può dimostrare che è una funzione biunivoca facendo vedere come se  $x_2 \neq x_1$  allora anche  $f(x_2) \neq f(x_1)$ .



Allora possiamo ricavare la sua inversa risolvendo l'equazione rispetto alla  $x$  e cambiando la variabile:

$$x = \frac{y-2}{3} \qquad f(x) = \frac{x-2}{3}$$

Def. 7.3. Una funzione  $f$  si dice **crescente** sull'insieme  $D$  se comunque presi due punti  $a$  e  $b$  con  $a < b$  si ha che  $f(a) < f(b)$ . Una funzione si dice **decrescente** sull'insieme  $D$  se per ogni coppia di punti  $a$  e  $b$  con  $a < b$  si ha che  $f(a) > f(b)$ .

Def. 7.4. Funzioni crescenti e decrescenti si dicono **monotone**.

Th. 7.1. Se una funzione  $f$  è monotona su un insieme  $D$ , essa è biunivoca in  $D$ .

**Dim.** Supponiamo infatti che  $f$  sia monotona crescente in  $D$ . In questo caso se  $x_1, x_2 \in D$  e se  $x_1 < x_2$  allora  $f(x_1) < f(x_2)$ . Se  $f$  invece è decrescente, per  $x_1 < x_2$  si ha  $f(x_1) > f(x_2)$ .

In ogni caso  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Perciò se  $x_1 \neq x_2$  anche  $f(x_1) \neq f(x_2)$  quindi la  $f$  è biunivoca.

**N.B.:** si può dimostrare che il grafico di una funzione e della sua inversa sono immagini simmetriche rispetto all'asse  $y = x$ .

Esaminiamo un esempio numerico di determinazione di una funzione inversa. Supponiamo che la  $f$  sia definita dalla formula  $f(x) = 3x + 2$  per tutti i valori reali di  $x$ . Secondo la definizione,  $f$  ammetterà una funzione inversa  $f^{-1}$  se è una funzione biunivoca. Per dimostrarlo basta far vedere che se  $f(x_1) = f(x_2)$  deve essere per forza  $x_1 = x_2$ . Infatti  $f(x_1) = 3x_1 + 2$  e  $f(x_2) = 3x_2 + 2$ , per cui se  $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$  si ha che  $x_1 = x_2$ .

Quindi  $f$  è una funzione biunivoca e perciò ammette inversa. Per calcolarla basta semplicemente risolvere l'equazione rispetto ad  $x$ :  $x = (y - 2)/3$  e poiché di solito si indica con  $x$  la variabile indipendente e con  $y$  la variabile dipendente, possiamo scrivere :  $f^{-1}(y) = (y - 2)/3$ .

## 8. Costi e ricavi

In Economia si considerano spesso due importanti funzioni: i **costi** i **ricavi** e la loro differenza che rappresenta il **profitto**. Esse possono dipendere da una o più variabili che possiamo indicare con  $x$ :

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Pensando alla produzione di articoli farmaceutici possiamo dire che i ricavi sono funzione della quantità  $q$  di prodotto venduto:

$$R(q) = p \cdot q$$

dove  $p$  è il prezzo unitario di ciascun articolo.

La funzione che rappresenta i costi può essere suddivisa in **costi fissi** (affitto dei locali, assicurazioni) e **costi variabili** (materie prime, lavoro). Il **lavoro** a sua volta comprende la produzione, la rifinitura e la spedizione.

Anche la funzione che rappresenta i costi può essere interpretata come una funzione lineare della quantità di prodotto  $C(q) = aq + c_0$ . Dove il coefficiente  $a$  rappresenta il costo globale per unità di prodotto e  $c_0$  i costi fissi.

Ci sono poi **spese di pubblicità** e **rappresentanza** che vanno trattate separatamente.

### **Esempio.**

Una farmacia ha circa 500 clienti che superano i 70 anni e 400 di questi hanno dichiarato che acquisterebbero un vaccino antiinfluenzale se questo fosse gratuito. Però se il costo del vaccino è  $p \neq 0$  il numero degli acquirenti possibili diminuisce in ragione di 20 persone per ogni euro. Il numero  $q$  di dosi vendute dipende perciò dal costo del farmaco:

$$q = 400 - 20p$$

Il ricavo della farmacia su quel prodotto sarà quindi:

$$R(p) = p(400 - 20p) = 400p - 20p^2.$$

Si può determinare a quale prezzo corrisponde il massimo ricavo?

### **Esercizi:**

- 1) Determinare l'equazione della retta passante per due punti  $P(-1, 3)$ ,  $Q(2, -1)$ .
- 2) Scrivere l'equazione della retta passante per un punto  $P(-1, 3)$  ed avente coefficiente angolare assegnato  $m = 2$ .
- 3) Calcolare la distanza di un punto  $C(0, 1)$  dalla retta passante per  $P$  e  $Q$ .
- 4) Determinare l'equazione della parabola e della circonferenza passanti per i tre punti  $P(-1, 3)$ ,  $Q(2, -1)$  e  $C(0, 1)$ .
- 5) Determinare l'equazione della circonferenza di centro  $C(0, 1)$  e raggio 2.

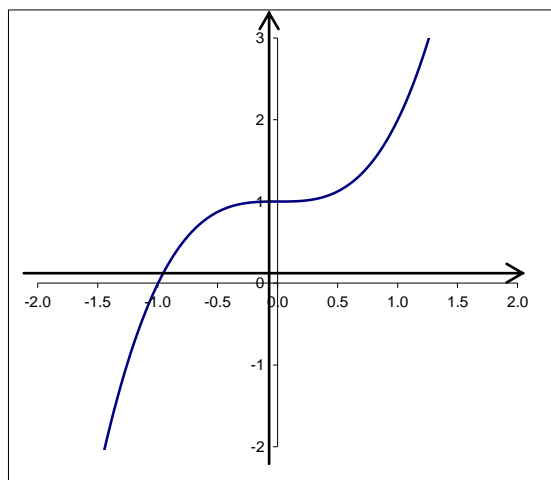
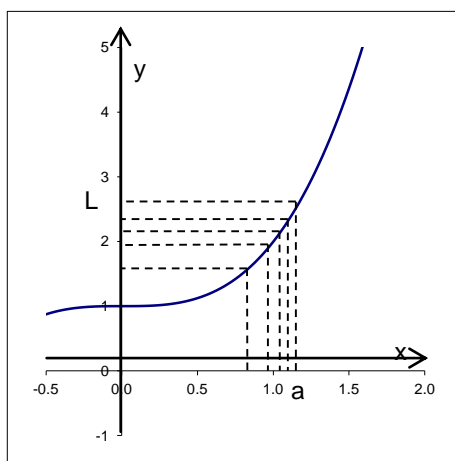
## VII. I LIMITI

### 1. Il concetto di limite.

Ci sono due problemi fondamentali che hanno condizionato lo sviluppo del calcolo: il primo si propone di individuare la tangente ad una curva in un punto e il secondo di determinare l'area delimitata da una curva. La soluzione di questi problemi, come vedremo in seguito, fa ricorso al **concetto di limite**.

Se ci chiediamo qual'è il valore di  $f$  per  $x = a$ , la risposta sarà  $f(a)$ ; e se ci chiedessimo "data una funzione  $f$  ed un numero reale  $a$ , a quale numero si avvicina  $f(x)$  quando  $x$  si avvicina ad  $a$ ?", saremmo tentati di dare la stessa risposta  $f(a)$ , ma sarebbe in generale sbagliato. Infatti le due domande sono differenti e la risposta dipende dalla natura della funzione  $f$  e dal punto  $a$ .

Tutti sappiamo che cosa significa "avvicinarsi" e nella figura sotto vediamo che quando  $x$  si avvicina ad  $a$ ,  $f(x)$  si avvicina ad  $L$  che in questo caso è proprio  $f(a)$ . Ciò accade se prendiamo ad esempio in considerazione la funzione  $f_1(x) = x^3 + 1$  definita per qualunque valore di  $x$ . Se abbozziamo uno schizzo del grafico vediamo che quando  $x$  si avvicina a 0,  $f_1(x)$  si avvicina a 1 ed inoltre  $f_1(0) = 1$ .

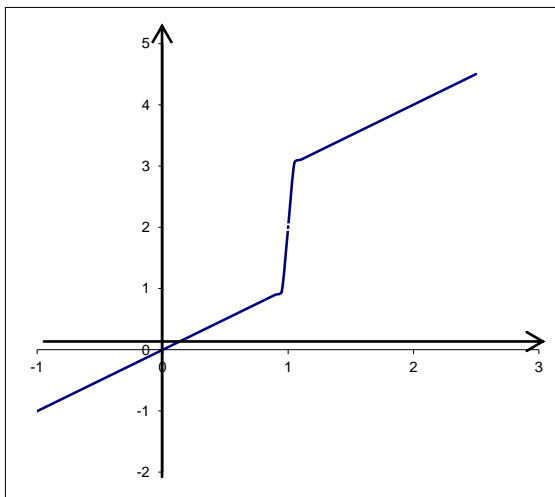


Esaminiamo ora il caso del salario di un rappresentante di prodotti farmaceutici. Esso è composto di un valore base (diciamo 750 Euro mensili) più una percentuale sulle vendite di ciascun prodotto (50 cents/pezzo) nella zona di sua pertinenza. Se però supera il numero di 500 pezzi venduti in un mese egli riceve un premio di 100 Euro e la sua percentuale viene portata a 75 cents.

$$s(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}q + 700 & \text{per } q < 500 \\ \frac{3}{4}q + 900 & \text{per } q > 500 \end{cases}$$

Il problema può essere descritto in modo schematico considerando la funzione  $f_2(x)$ :

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 1 \\ 2 & \text{per } x = 1 \\ x + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

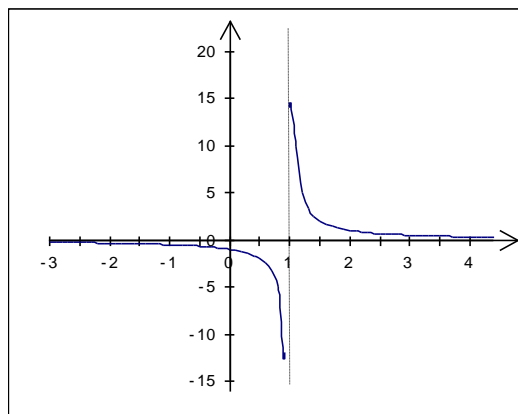
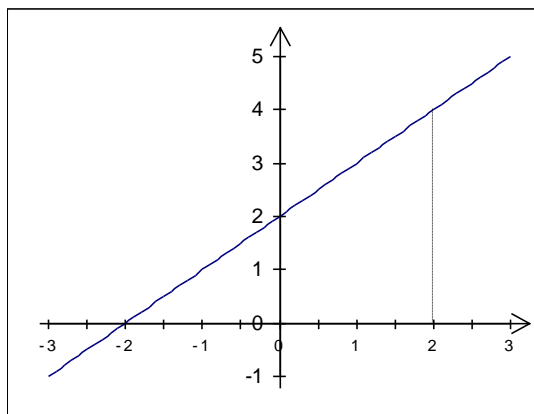


Vediamo dal grafico che se  $x$  si avvicina ad 1 dalla parte sinistra  $f_2(x)$  si avvicina ad 1, mentre se  $x$  si avvicina a 1 dalla parte destra  $f_2(x)$  si avvicina a 3.

Notiamo che  $f_1$  ed  $f_2$  si comportano nei punti in questione (0 per  $f_1$  e 1 per  $f_2$ ) in modo molto diverso. Infatti:

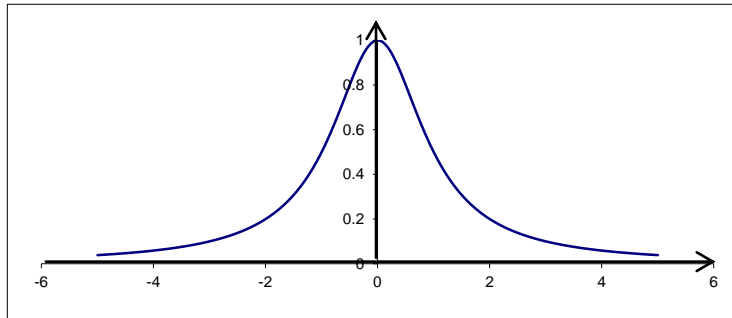
- per  $f_2$  dobbiamo esaminare separatamente l'avvicinarsi di  $x$  ad a da destra e da sinistra, mentre per  $f_1$  questo non ha importanza;
- si vede che  $f_2(1)$  è diverso da 1 e da 3, cioè  $f_2$  non si avvicina al valore che essa assume in 1, come invece avviene per  $f_1$ .

Un altro esempio significativo è dato dalla funzione  $f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  (definita per  $x \neq 2$ ) quando  $x$  si avvicina a 2. Infatti in questo caso  $f_3(x)$  si avvicina a 4 non importa da quale parte  $x$  si avvicini a 2, mentre non è definita per  $x = 2$ .



$f_4(x) = \frac{1}{x-1}$  è definita per  $x \neq 1$  e quando  $x$  si avvicina a 1 diventa sempre più grande, assumendo valori positivi se si avvicina da destra, negativi se da sinistra. Essa non è definita per  $x = 1$ .

$f_5(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  diminuisce sempre più con l'aumentare di  $x$  e si avvicina a 0 sia per valori positivi che negativi.



La funzione  $f_3(x)$  illustra meglio di tutte il concetto di limite. Possiamo dire cioè che quando una funzione  $f$  si avvicina ad  $L$  se  $x$  si avvicina ad  $a$ : "il **limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente ad  $a$  è  $L$** " e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Per allargare la nostra notazione di limite a casi come quello della  $f_2$  dobbiamo distinguere il caso in cui  $x$  si avvicina ad  $a$  da **destra** o da **sinistra**.

Scriveremo:

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  se  $f(x)$  tende ad  $L$  quando  $x$  tende ad  $a$  da sinistra

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  se  $f(x)$  tende ad  $L$  quando  $x$  tende ad  $a$  da destra.

E' facile vedere che:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) = 1$
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = 3$	$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_3(x) = 4$

L'analisi infinitesimale poggia su di una manciata di teoremi riguardanti i limiti. Perciò se vogliamo dare una base solida ai nostri ragionamenti dobbiamo rimpiazzare la nostra discussione intuitiva sui limiti con argomenti formali basati su definizioni esatte. Incominciamo rifacendoci al concetto di **intorno** introdotto parlando degli intervalli aperti. Ricordiamo che se  $a$  è un numero reale qualunque ed  $s$  un numero positivo, intorno di centro  $a$  e raggio  $s$  è l'intervallo aperto  $(a-s, a+s)$  e lo indichiamo con il simbolo  $I_s(a)$ .

Consideriamo ad esempio:



Possiamo anche scrivere  $I_s(a) = \{x / |x-a| < s\} = \{x/a-s < x < a+s\}$ , e cioè i punti di  $I_s(a)$  sono quelli che si trovano entro una distanza  $s$  da  $a$ .

Perciò se diciamo *essere vicino ad  $a$*  oppure *essere in un intorno di  $a$*  diciamo la stessa cosa.

Se consideriamo la funzione  $f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  per  $x \neq 2$  (per la quale abbiamo visto che  $\lim_{x \rightarrow a} f_3(x) = 4$ ), e se prendiamo un intorno di 4,  $I_{1/2}(4)$  possiamo trovare un intorno di 2 sull'asse delle ascisse tale che per tutti gli  $x$  appartenenti ad esso si abbia  $f_3(x) \in I_{1/2}(4)$ .

Questo è vero in generale per una funzione  $f(x)$  qualunque (ma tale che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ) e comunque piccolo sia  $I_r(L)$ .

N.B. Sia dunque da ora in poi  $a$  un punto del campo di definizione  $D$  della funzione  $f$  oppure un punto di accumulazione per esso.

Possiamo quindi dare la seguente definizione:

Def. 1.1. Se  $f$  è una funzione definita in un intervallo aperto di cui  $a$  è un punto interno (ma nel quale  $f$  non è necessariamente definita), diremo che  $f(x)$  ha per limite  $L$  quando  $x$  tende ad  $a$  se per ogni intorno  $I_r(L)$  possiamo trovare un corrispondente intorno  $I_s(a)$  tale che se  $x \in I_s(a)$  (escluso eventualmente  $a$ ) allora  $f(x) \in I_r(L)$ .

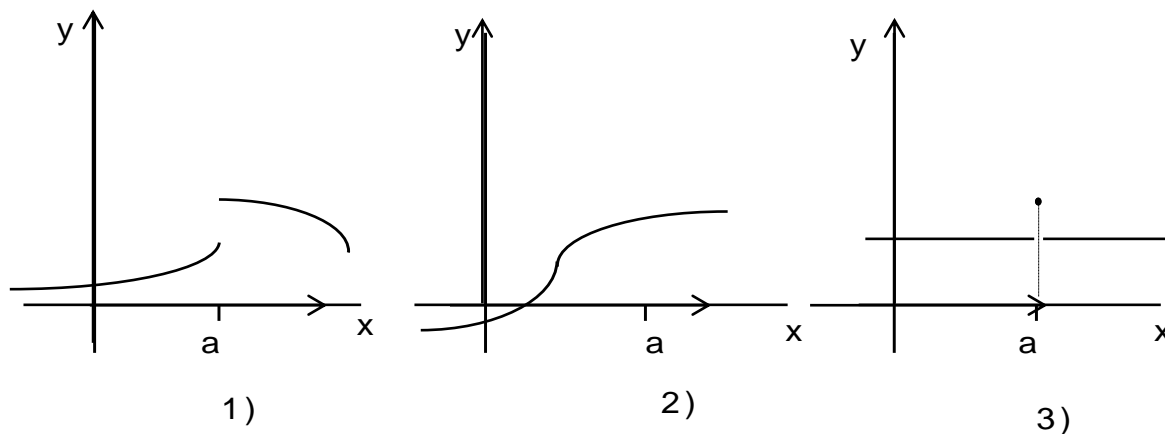
Graficamente, fissato l'intervallo  $I_r(L)$ , portando le parallele all'asse delle ascisse e poi quelle all'asse delle ordinate per i punti di intersezione con la curva, si determina l'insieme di tutti i punti  $x$  per cui  $f(x) \in I_r(L)$ .

Notiamo però che questo intervallo non è sempre centrato in  $a$ , di conseguenza basterà scegliere come raggio  $s$  dell'intorno  $I_s(a)$  l'estremo dell'intervallo più vicino ad  $a$ .

## 2. Continuità.

Una delle conseguenze più importanti del concetto di limite è quello di *continuità* di una funzione oppure di **funzione continua**.

Intuitivamente possiamo dire che una funzione è continua se il suo grafico non è interrotto e cioè non presenta salti improvvisi o interruzioni.



Di queste tre funzioni la sola ad essere ovunque continua è la 2).

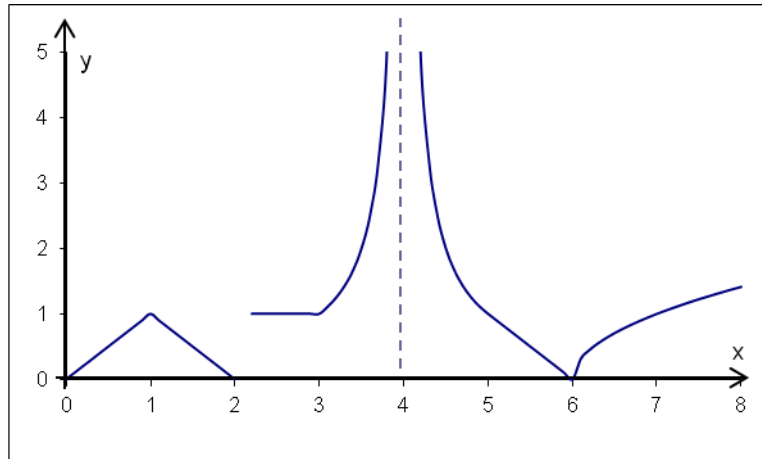
Usando il concetto di limite possiamo dire che:

Def. 2.1. Una funzione è **continua** per  $x = a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

E' evidente che per essere continua in  $a$  la funzione deve essere ivi definita.

Delle funzioni viste precedentemente notiamo che  $f_1(x)$  è continua per  $x = 0$ , infatti  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ , mentre la  $f_2$  non è continua in  $x = 1$  e la  $f_3$  non è continua per  $x = 2$ .

Succede in generale che una stessa funzione sia continua in alcuni punti e non lo sia in altri. Se esaminiamo infatti la funzione:



notiamo che essa è continua in tutti i punti dell'intervallo  $(0,7)$  tranne  $2,3,4$ . Essa è continua in tutti i punti degli intervalli aperti  $(0,2)$ ,  $(2,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(4,7)$ . E' perciò utile dare la seguente definizione:

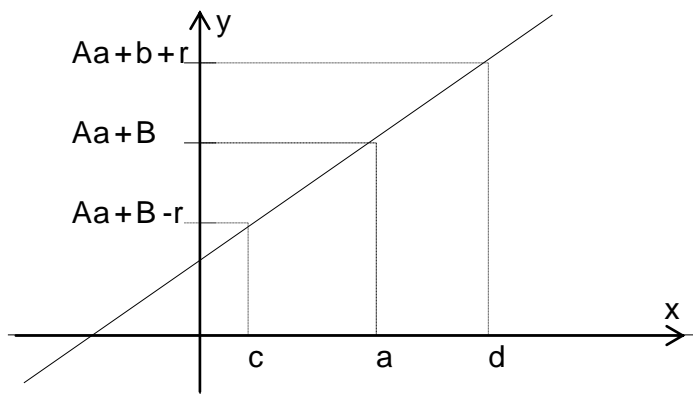
Def. 2.2. Una funzione  $f$  definita su un insieme  $D$  si dice continua in  $D$  se è continua in ogni punto di  $D$ .

Sembra intuitivo che una retta sia una funzione continua per qualunque valore di  $x$ ; cerchiamo di dimostrarlo.

Th. 2.1. Una funzione  $f$  del tipo  $f(x) = Ax + B$  dove  $A$  e  $B$  sono numeri reali, è continua sull'insieme di tutti i numeri reali.

Dim. Se  $A = 0$  allora  $f(x) = B$  e si dimostra facilmente che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ .

Infatti fissato  $I_r(B)$  possiamo scegliere  $I_s(a)$  prendendo per  $s$  un valore positivo qualunque. Se  $A = 0$  ed  $a$  è un numero reale, lo è anche  $Aa + B$  per cui  $f$  è definita per  $x = a$ .



Per dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = Aa + B$ , fissato  $I_r(Aa + B)$  si ha:

$$\begin{aligned} Ac + B &= (Aa + B) - r & Ad + B &= (Aa + B) + r \\ Ac &= Aa - r & Ad &= Aa + r \\ c &= a - r/A & d &= a + r/A \end{aligned}$$

ed ora se  $A > 0$  prendiamo  $s \leq r/A$ , se  $A < 0$  prendiamo  $s \leq -r/A$ .

### 3. Teorema fondamentale sul limite.

Se quando  $x$  tende ad  $a$  la funzione  $f$  tende ad  $A$  e  $g$  tende a  $B$ , sembra ragionevole pensare che la funzione  $f + g$  tenda ad  $A + B$  per  $x$  tendente ad  $a$ .

Questa affermazione fa parte di un teorema molto importante:

Th. 3.1. (Teorema fondamentale sul limite). Supponiamo che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , allora avremo che:

- a)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)+g(x)] = A + B$                       b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$   
c)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-g(x)] = A - B$                       d) se  $B \neq 0$   $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A/B$

Ometteremo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Come prima applicazione possiamo dimostrare la continuità della funzione  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ . Basta scrivere il polinomio nella forma  $f(x) = x(x + 2) + 3$  e notare che è il prodotto e la somma di funzioni lineari e quindi continue.

Questo esempio introduce una importante classe di funzioni e cioè le funzioni polinomiali.

Def. 3.1. Una funzione  $P$  del tipo  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n$  dove  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono numeri reali ed  $n$  intero positivo si chiama **funzione polinomiale**.

Estendendo il risultato appena ottenuto possiamo dire come corollario al teorema fondamentale sul limite, che una funzione polinomiale è una funzione continua per qualunque valore di  $x$ .

Una classe più vasta di funzioni continue si ottiene considerando i rapporti tra funzioni polinomiali.

Def. 3.2. Una funzione  $R$  del tipo  $R(x) = P(x)/Q(x)$  dove  $P$  e  $Q$  sono funzioni polinomiali si chiama **funzione razionale** ed è definita per ogni  $x$  in cui sia  $Q(x) \neq 0$ .

Come corollario al teorema fondamentale sul limite si può dire che una funzione razionale è continua in ogni punto del suo campo di definizione.

Un altro corollario ancora più importante in quanto valido per tutte le funzioni continue ci dice che se  $f$  e  $g$  sono continue in  $a$  allora lo sono anche:

$$f + g, f - g, f \times g \text{ ed } f/g \text{ se } g(a) \neq 0.$$

### 4. Continuità di una funzione composta.

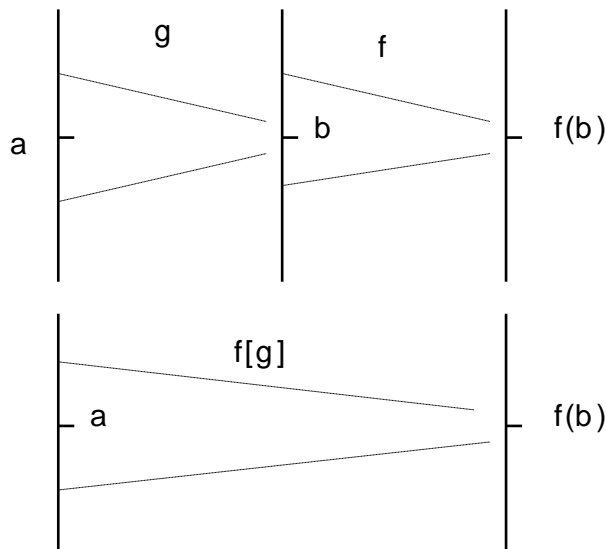
Oltre alle operazioni algebriche anche la operazione di composizione conserva la continuità. In altre parole se  $f$  e  $g$  sono continue lo è anche  $f[g]$ . Vale infatti il seguente teorema:

Th. 4.1. Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni tali che 1)  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ; 2)  $f$  è continua in  $b$ , allora  $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$ .



Dim. Per dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f(b)$  dobbiamo dimostrare che per qualunque intorno  $I_r[f(b)]$  si può trovare un intorno  $I_s(a)$  (escluso al più  $a$ ) tale che se  $x \in I_s(a)$  allora  $f[g(x)] \in I_r[f(b)]$ .

Facciamo un quadro della situazione:



e fissato  $I_r[f(b)]$  cerchiamo di determinare  $I_s(a)$ .

Dato  $I_r[f(b)]$  ci sono due passi da fare per determinare  $s$ .

Ecco il primo: poichè  $f$  è continua per  $x = b$ , allora  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$  per cui fissato l'intorno  $I_r[f(b)]$  esiste un  $s_1$  tale che se  $x \in I_{s_1}(b)$  allora  $f(x) \in I_r[f(b)]$ .

Il secondo passo è più delicato. Poichè  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , per ogni intorno di  $b$  si può trovare ...ecc. ecc.. Ora prendiamo come intorno di  $b$ ,  $I_{s_1}(b)$  e in corrispondenza, poichè il limite esiste, possiamo trovare un intorno  $I_s(a)$  (escluso al più  $a$  stesso) tale che se  $x \in I_s(a)$  allora  $g(x) \in I_{s_1}(b)$ .

Ci rendiamo conto che  $s_2$  è l' $s$  cercato poichè se  $x \in I_s(a)$  allora  $g(x) \in I_{s_1}(b)$  e quindi  $f[g(x)] \in I_r[f(b)]$ . Perciò se eliminiamo il passo di mezzo troviamo che se  $x \in I_s(a)$  allora  $f[g(x)] \in I_r[f(b)]$ .

## 5. Ancora sui limiti.

Abbiamo già visto in precedenza i concetti di limite destro e sinistro e quello di limite infinito. Per esaminarli più concretamente abbiamo bisogno di alcune definizioni:

Def. 5.1. Diremo semintorno destro (o sinistro) di ampiezza  $s$  del punto  $a$ , l'intervallo  $I_s^d(a) = \{x/a < x < a+s\}$  ( $I_s^s(a) = \{x/a-s < x < a\}$ ).

Abbiamo già visto nella  $f_2(x)$  ed  $f_4(x)$  come si ottengano risultati diversi a seconda che ci si avvicini ad  $a$  da destra oppure da sinistra.

Def. 5.2. Diremo che  $L$  è il limite destro (sinistro) per  $x$  tendente ad  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ , se per ogni intorno  $I_r(L)$  esiste un intorno destro (sinistro) di  $a$   $I_s^d(a)$  tale che se  $x \in I_s^d(a)$  si abbia  $f(x) \in I_r(L)$ .

Una relazione importante tra limite destro, limite sinistro e limite di una funzione ci è dato dal seguente teorema:

Th. 5.1. Il limite per  $x$  tendente ad  $a$  della funzione  $f(x)$  è uguale ad  $L$ , se e solo se esistono il limite destro il limite sinistro, e sono uguali a  $L$ ; cioè se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  allora:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

Dim. Fissato  $I_r(L)$  avremo per ipotesi che  $f(x) \in I_r(L)$  per tutti gli  $x \in I_{s_1}^d(a)$ , e  $x \in I_{s_2}^s(a)$  dimodochè  $f(x) \in I_r(L)$  per tutti gli  $x \in I_s(a)$  dove  $s = \min(s_1, s_2)$ .

Possiamo estendere la notazione di continuità.

Def. 5.3. La funzione  $f$  si dice continua sull'intervallo chiuso  $[a, b]$  se sono soddisfatte le tre condizioni: 1)  $f$  è continua su  $(a, b)$ , 2)  $f$  è continua a destra in  $a$ , 3)  $f$  è continua a sinistra in  $b$ .

## 6. Limite infinito.

Possiamo estendere la nostra nozione di limite ai casi in cui la variabile, la funzione, oppure tutte e due, assumono valori arbitrariamente grandi. Formalmente queste definizioni si ottengono immediatamente estendendo la nozione di intorno.

Consideriamo ad esempio il  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ; questo significa che  $f(x)$  diventa sempre più grande man mano che  $x$  si avvicina ad  $a$ . Sostituiamo le parole *sempre più grande* con qualcosa di più preciso. Supponiamo che  $M$  sia un numero positivo.

Se  $f(x)$  diventa sempre più grande per  $x \rightarrow a$  è ragionevole pensare che per tutti gli  $x$  di un intorno di  $a$  sufficientemente piccolo sarà  $f(x) > M$ . In altre parole se  $M$  è un numero positivo qualunque, sarà possibile trovare un intorno di  $a$  tale che  $f(x) > M$  per tutti gli  $x$  di questo intorno.

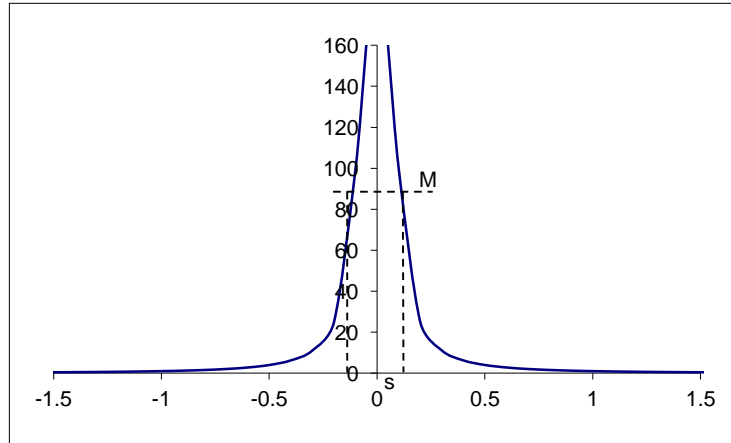
Def. 6.1. Diremo che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  se per ogni numero positivo  $M$  si può trovare un numero positivo  $s$  tale che se  $x \in I_s(a)$  allora  $|f(x)| > M$ .

Prendiamo ad esempio la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  definita per  $x \neq 0$ . Avremo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

Infatti se consideriamo il diagramma, fissato  $M$  possiamo trovare l'intorno di  $0$  tale che.....ecc., per cui se  $\frac{1}{s^2} = M$  ed  $s^2 = \frac{1}{M}$  possiamo prendere  $s = \frac{1}{\sqrt{M}}$  e se  $x \in I_s(0)$  allora  $f(x) > M$ .

Def. 6.2. Diremo che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  se per ogni  $M > 0$  si può trovare un  $s$  tale che se  $a - s < x < a + s$  allora  $f(x) < -M$ .

Def. 6.3. Diremo che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  se per ogni  $M > 0$  si può trovare un  $s > 0$  tale che se  $x \in I_s(a)$  allora  $f(x) < -M$ .



Vediamo come si può definire il limite di una funzione per  $x$  tendente all'infinito, e cioè che cosa succede quando  $x$  diventa infinitamente grande. Il ragionamento è analogo a quello che abbiamo fatto in precedenza e cioè per dire che  $x$  diventa sempre più grande e cioè tende all'infinito, diremo che è maggiore di un certo  $M > 0$ . E precisamente:

Def. 6.4. Diremo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  se per ogni  $r > 0$  si può trovare un numero  $M > 0$  tale che se  $x > M$  allora  $f(x) \in I_r(L)$ .

Così ad esempio la funzione  $f(x) = 1/x$  ci fa vedere come quando  $x$  diventa infinitamente grande essa tende a zero; e secondo la definizione 6.4. si vede che comunque piccolo noi fissiamo un numero positivo  $r$  troveremo sempre un numero  $M > 0$  tale che per tutti gli  $x > M$  si ha  $f(x) < r$ .

Def. 6.5. Diremo che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  se per ogni  $M_1 > 0$  si può trovare un  $M_2 > 0$  tale che se  $x < -M_2$  allora  $f(x) > M_1$ .

E' facile estendere questo modo di ragionare al caso  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  oppure al caso  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

## 7. I principali teoremi sui limiti.

Abbiamo già fatto notare come quando parliamo di intorno di  $a$  di ampiezza  $s$  intendiamo l'insieme  $I_s(a) = \{x/a-s < x < a+s\}$  oppure più coincisamente  $I_s(a) = \{x/ |x-a| < s\}$ ; perciò fissare un intorno di  $a$  di ampiezza  $s$  significa fissare un numero  $s > 0$  tale che  $|x - a| < s$ . Detto questo risulta logica la seguente:

Def. 7.1. Si dice che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se per ogni  $r > 0$  si può trovare un  $s > 0$  tale che per tutti gli  $x$  per cui  $|x-a| < s$ , escluso al più il punto  $a$ , si abbia  $|f(x) - L| < r$ .

Come prima applicazione dimostriamo il seguente teorema:

Th. 7.1. Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  allora  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = 0$  e viceversa.

Dim. La dimostrazione è immediata se notiamo che per ipotesi per ogni  $r > 0$  si può trovare un intorno di  $a$  per tutti i punti del quale  $|f(x) - L| < r$ . Ma questo è come scrivere  $|[f(x) - L] - 0| < r$  che ci dimostra la tesi.

La dimostrazione del viceversa è ovvia.

Un metodo spesso usato in matematica per dimostrare alcune proposizioni è quello della dimostrazione “per assurdo”. Ammettendo l’opposto di quanto si vuole affermare si dimostra che esso conduce a risultati inaccettabili, cioè assurdi.

Con tale metodo si dimostra il seguente **Teorema sulla unicità del limite**.

Th. 7.2. Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  allora  $L$  è unico.

Dim. Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, e cioè che esista un’altro  $\lim_{x \rightarrow a}$

$f(x) = L_1 \neq L$ . In questo caso avremo:

$$|L_1 - L| = |f(x) - L - f(x) + L_1| \leq |f(x) - L| + |f(x) - L_1| < r + r = 2 \cdot r$$

Palesamente assurdo se si pensa che  $r$  è un numero qualunque e potrebbe essere anche uguale a  $|L_1 - L|/2$ .

Dimostriamo ora il **Teorema sulla permanenza del segno**.

Th. 7.3. Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$  esiste un intorno di  $a$  (escluso al più  $a$  stesso) per cui  $f(x) > 0$ .

Dim. Per ipotesi fissato un numero  $r > 0$  si può determinare un numero  $s$  tale che per tutti gli  $x$  per cui  $|x-a| < s$  si abbia  $|f(x) - L| < r$ .

Quest’ultima relazione si può anche scrivere  $L - r < f(x) < L + r$  per cui se prendiamo  $r = L/2$  si ha  $L/2 < f(x) < 3L/2$  e quindi  $f(x) > 0$ .

Talvolta risulta utile il seguente **Teorema del confronto**.

Th. 7.4. Se esiste un intorno di  $a$  (escluso al più  $a$  stesso) in cui  $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$  e inoltre  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L$ , allora anche la funzione  $f(x)$  ammette limite per  $x$  tendente ad  $a$  e si ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

Dim. Per la seconda ipotesi, fissato un intorno  $I_r(L)$  possiamo determinare un intorno  $I_{s_1}(a)$  e un intorno  $I_{s_2}(a)$  tali che per  $x \in I_{s_1}(a)$  si abbia  $f_1(x) \in I_r(L)$  e per  $x \in I_{s_2}(a)$  si abbia  $f_2(x) \in I_r(L)$ .

Nell’intorno  $I_s(a)$  dove  $s = \min(s_1, s_2)$  avremo che sia  $f_1(x)$  che  $f_2(x)$  appartengono all’intorno  $I_r(L)$  e poichè  $f(x)$  è compresa tra di esse avremo anche  $f(x) \in I_r(L)$ .

## 8. Discontinuità.

Abbiamo già visto più volte che alcune funzioni si comportano in modo curioso in certi punti: ad esempio le  $f_2$  ed  $f_4$  del par.1. nel punto  $x = 1$  e la  $f_3$  nel punto  $x = 2$ .

Questi sono punti in cui la funzione non è continua e si chiamano punti di **discontinuità**.

Si possono avere tre situazioni: 1) quando il limite destro e quello sinistro esistono finiti ma non sono uguali come nella  $f_2$ ; 2) quando avendo limite destro e limite sinistro finiti e uguali, la funzione o non è definita in quel punto, oppure vi assume un valore diverso dal limite come nella  $f_4$ ; 3) quando almeno uno dei due limiti è infinito come nella  $f_3$ .

Nel caso 2 la discontinuità viene detta *rimovibile* essendo possibile ridefinire la funzione nel punto  $a$  in modo da renderla continua. Nel caso 3, piuttosto che di discontinuità, si preferisce parlare di **punto singolare** o di **polo** della funzione.

## 9. Esempi ed applicazioni.

1) Si dimostra facilmente che  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  e che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

Infatti per il primo, fissato un numero  $r > 0$  piccolo a piacere potremo trovare un numero  $M > 1/r$  in modo che per ogni  $x > M$  si abbia  $|f(x)| < r$ .

Nel secondo caso facciamo tendere  $x$  a  $0^+$ , per cui fissato un numero comunque grande  $M$  potremo trovare un intorno destro di  $0$ , di ampiezza  $s < 1/M$  in modo che per ogni  $x < s$  si abbia  $f(x) > M$ .

2) Come conseguenza dell'esempio precedente possiamo calcolare il limite per  $x$  tendente all'infinito di una funzione razionale  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ .

Basta dividere il numeratore e il denominatore per la potenza massima della  $x$  e ricordare che  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ .

A seconda dei valori di  $m$  ed  $n$  si trovano tre possibili situazioni che danno luogo a risultati diversi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ a_n & \text{se } n = m \\ \infty & \text{se } n > m \end{cases}$$

Nel caso in cui  $x$  tende a  $-\infty$  otteniamo per  $n > m$  due possibili risultati:  $+\infty$  se  $n-m$  è pari, e  $-\infty$  se  $n-m$  è dispari.

## 10. Infiniti ed infinitesimi.

Def. 10.1. Sia  $f(x)$  una funzione definita in un intorno del punto  $a$  (escluso al più il punto  $a$  stesso). Se risulta  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  si dice che  $f(x)$  è un **infinitesimo** per  $x$  tendente ad

$a$ . In breve infinitesimo è una funzione che ha per limite  $0$ .

Sia  $g(x)$  un altro infinitesimo per  $x$  tendente ad  $a$ ; in taluni problemi è utile fare un confronto tra la rapidità con cui  $f(x)$  e  $g(x)$  tendono a zero. A tale scopo si considera il

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ . Se tale limite è finito e diverso da  $0$  si dice che i due infinitesimi sono dello *stesso ordine*; se uguale a  $0$  si dice  $g(x)$  è un infinitesimo di **ordine superiore** rispetto a  $f(x)$ ; se infine è uguale ad infinito si dice che  $g(x)$  è un infinitesimo di **ordine inferiore** rispetto a  $f(x)$ .

Def. 10.2. Date più funzioni  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ , ... tutte infinitesime per  $x \rightarrow a$ , scegliamone una, ad es.  $f(x)$ , che chiamiamo **infinitesimo principale**. Se poi per un valore  $n > 0$  i due infinitesimi  $g(x)$  e  $f^n(x)$  sono dello stesso ordine, si dice che  $g(x)$  è un infinitesimo di ordine  $n$  rispetto all'infinitesimo principale  $f(x)$ .

Di solito se  $a$  è finito si sceglie come infinitesimo principale la funzione  $x-a$ , se  $a$  è infinito si prende  $\frac{1}{x}$ .

Def. 10.3. Sia  $f(x)$  definita in un intorno del punto  $a$  (escluso al più il punto  $a$  stesso). Se risulta che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  la funzione  $f(x)$  si dice un **infinito** per  $x$  tendente ad  $a$ .

Si chiama perciò infinito una quantità che abbia come limite  $\infty$ .

Due infiniti  $f(x)$  e  $g(x)$  si possono confrontare con un criterio analogo a quello seguito per gli infinitesimi. A seconda che risulti  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$  uguale ad  $L$ , finito, infinito oppure zero, si dirà che i due infiniti sono dello stesso ordine, che  $g(x)$  è un infinito di ordine inferiore o superiore rispetto all'infinito principale  $f(x)$ .

Def. 10.4. Se per un certo  $n > 0$  le due funzioni  $g(x)$  e  $f^n(x)$  risultano infiniti dello stesso ordine, si dice che  $g(x)$  è un infinito di ordine  $n$  rispetto all'infinito principale  $f(x)$ .

Def. 10.5. Se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f^n(x)}$  non esiste nè finito nè infinito, si dice che  $f(x)$  e  $g(x)$  non sono confrontabili.

Di solito se  $a$  è finito si assume come infinito principale la funzione  $\frac{1}{x-a}$ , se  $a$  è infinito si prende semplicemente  $x$ .

### Quantità Economica di Riordino.

Una farmacia ha un magazzino di dimensioni finite e deve quindi limitare la quantità che deve tenere a portata di mano di ogni prodotto anche in modo da avere la certezza di vendere la merce prima dei limiti di scadenza.

Bisogna quindi determinare quanto costa *annualmente* ordinare, acquistare e tenere in magazzino un prodotto, e di conseguenza la **quantità di riordino** del prodotto stesso.

Schematicamente:

$$C_T = (\text{numero di ordini})(\text{costo di ogni ordine}) + \\ + (\text{quantità media in magazzino}) (\text{valore del prodotto})(\text{costo di immobilizzo}) + \\ + (\text{domanda annuale})(\text{prezzo unitario di acquisto})$$

Sia:

$D$  = numero di pezzi venduto annualmente;  $C_0$  = costo di un ordine;

$C_m$  = costo di tenuta in magazzino (percentuale del valore medio dell'inventario);

$p$  = prezzo di acquisto;  $q$  = quantità di riordino.

Il costo totale dell'inventario può essere espresso come una funzione della quantità di riordino  $q$ :

$$C_T = f(q) = \frac{D}{q} C_0 + \frac{q}{2} C_m + pD \quad \text{dalla quale bisogna desumere la quantità di riordino}$$

più conveniente (da F. S. Budnick "Applied Mathematics" McGraw-Hill).

## VIII. LE DERIVATE

### 1. Velocità istantanea.

Se il ponte di Namche Bazar è alto 18 metri sul fiume Dudh Koshi, in un sistema di riferimento con origine sulla superficie dell'acqua e direzione verso l'alto, la quota di un oggetto lasciato cadere liberamente dalla sommità del ponte, dopo  $t$  secondi sarà:

$$s(t) = 18 - 5t^2.$$



Fig. 1.8.-Caduta di un grave nel vuoto.

Lo spazio che il grave deve ancora percorrere al tempo  $t$  sarà dunque:

$$s(t) = 18 - 5t^2$$

e al tempo  $t+1$  sarà:

$$s(t+1) = 18 - 5(t+1)^2.$$

In un secondo perciò la distanza percorsa sarà:

$$s(t+1) - s(t) = -5(2t+1).$$

Più in generale se consideriamo due istanti  $t_1$  e  $t_2$ :

Def. 1.1. Lo *spostamento* subito da un corpo in caduta libera nel periodo tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ )

$$\text{sarà: } s_{t_2} - s_{t_1} = -5 \cdot (t_2^2 - t_1^2)$$

Cerchiamo ora di definire la *velocità istantanea* dell'oggetto, cioè la velocità posseduta dall'oggetto in un certo istante, e incominciamo dal concetto di velocità media:

Def. 1.2. Diremo *velocità media* di un corpo in caduta libera nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  la quantità:

$$v_m = \frac{s_{t_2} - s_{t_1}}{t_2 - t_1}$$

Nel caso visto in precedenza si ottiene:  $-5(t_1 + t_2)$ .

Per definire la velocità istantanea, ad esempio all'istante  $t = 2$  esaminiamo che cosa succede quando  $t$  si scosta molto poco da  $t_1$ :

$$t_1 = 2, t_2 = 2.01, v_m = -20.05; \quad t_1 = 1.99, t_2 = 2, v_m = -19.95$$

$$t_1 = 2, t_2 = 2.001, v_m = -20.005; \quad t_1 = 1.999, t_2 = 2, v_m = -19.995$$

In generale la velocità media tra l'istante  $t_1 = 2$  e  $t_2 = 2 + h$  sarà  $v_m = -5(4 + h)$  e tra gli istanti  $t_1 = 2 - h$  e  $t_2 = 2$ ,  $v_m = -5(4 - h)$ .

E' logico prendere come velocità istantanea quel valore che si ottiene dalla velocità media rendendo sempre più piccolo  $h$ .

Cioè  $\lim_{h \rightarrow 0} -5(4+h) = -20$ , oppure  $\lim_{h \rightarrow 0} -5(4-h) = -20$

Si consideri ora in generale un oggetto che all'istante  $t$  si trova nella posizione  $f(t)$ .

Def. 1.3. Si dice *spostamento* dell'oggetto nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  la quantità:

$$f(t_2) - f(t_1).$$

Def. 1.4. Sia  $f(t)$  la posizione di un oggetto al tempo  $t$ . La sua *velocità media* nell'intervallo di tempo  $(t_1, t_2)$  sarà:

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

La velocità media tra  $t$  e  $t+h$  sarà

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \text{e quella tra } t-h \text{ e } t \quad \frac{f(t-h) - f(t)}{h}$$

Def. 1.5. Sia  $f(t)$  la posizione di un oggetto all'istante  $t$ . La sua *velocità istantanea* al tempo  $t_0$  sarà:

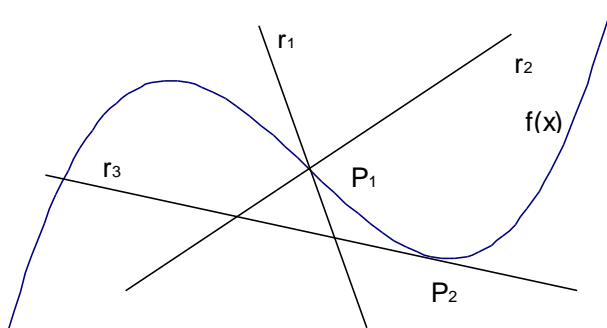
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

## 2. Tangente ad una curva.

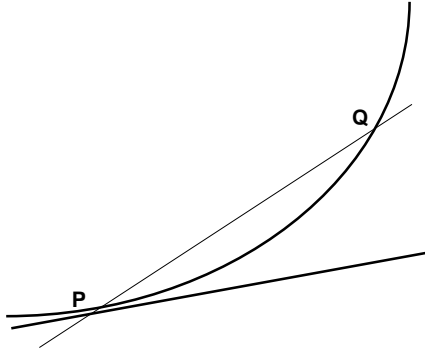
E' facile tracciare la tangente ad una circonferenza, basta portare la perpendicolare al raggio passante per un punto. Non è altrettanto facile farlo per una curva diversa dalla circonferenza, anche perchè non ne abbiamo una chiara definizione.

Cerchiamo quindi di trovare, per mezzo della geometria analitica, una definizione operativa di tangente ad una curva.

Sia  $l$  una data curva e sia  $P$  un punto su  $l$ ; ogni retta passante per  $P$  è individuata dalla sua pendenza. Perciò cerchiamo di trovare una definizione ragionevole della pendenza della tangente a  $l$  in  $P$ . Sia  $s(P,Q)$  la pendenza della retta determinata dai punti  $P$  e  $Q$ , dove  $P$  è il punto assegnato, e  $Q$  è un altro punto qualunque della curva.







Dalla figura si vede che, se  $Q$  viene preso sempre più vicino a  $P$ , la retta corrispondente si avvicina ad una posizione che sembra ragionevole pensare quella della retta tangente. La pendenza  $s(P,Q)$  dovrebbe quindi assumere valori che si avvicinano a quelli della pendenza della retta tangente. Di conseguenza:

Def. 2.1. Definiamo come pendenza della tangente in  $P$  alla curva  $l$  il limite della quantità  $s(P,Q)$  quando  $Q$  tende a  $P$ , semprechè questo limite esista.

Ricordiamo che la pendenza del segmento congiungente due punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  è data da  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

Supponiamo poi che la curva  $l$  sia il grafico della funzione  $y = f(x)$  dove  $f$  è una funzione continua. Sia  $P$  il punto della curva la cui ascissa è  $x$  e  $Q$  il punto di ascissa  $x+h$ ; allora  $P$  è il punto  $(x, f(x))$  e  $Q$  è il punto  $(x+h, f(x+h))$ .

Pendenza del segmento  $PQ$  sarà:  $s(P,Q) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

Dire che  $Q$  si avvicina a  $P$  è come dire che  $h$  tende a  $0$ , per cui:

Def. 2.2. Si definisce come **pendenza** della tangente alla curva  $l$  di equazione  $y = f(x)$  nel punto  $P$  il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

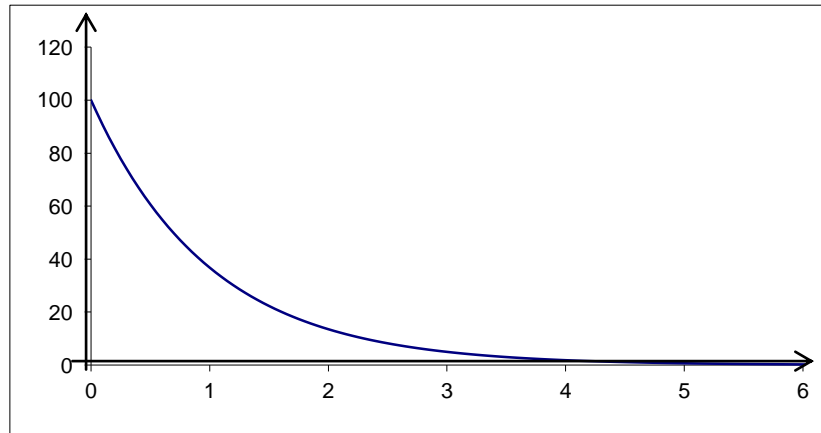
### 3. Farmacocinetica.

La concentrazione  $A(t)$  di un farmaco nel sangue di un paziente diminuisce con il tempo secondo un meccanismo che dipende dalla natura del farmaco e dal metabolismo del paziente. Nello studio di un processo terapeutico è importante conoscere quale è il tasso di decremento della concentrazione dopo l'assunzione del farmaco. Se quindi all'istante  $t + h$  la concentrazione è  $A(t + h)$  il tasso di decremento medio nell'intervallo che va da  $t$  a  $t+h$  sarà dato da:

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} \quad \text{mg/cm}^3$$

Il **tasso istantaneo** di decremento della concentrazione al tempo  $t$  darà dato da:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$



#### 4. Definizione di derivata.

I concetti che abbiamo esaminato, velocità di un grave, pendenza di una curva e tasso di decremento della concentrazione di un farmaco, apparentemente non hanno alcunchè di comune, ma in tutti e tre i casi arriviamo alla stessa formula:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Def. 4.1. Data una funzione  $f$  ed un punto  $x$  del suo dominio, si dice **derivata** di  $f$  nel punto  $x$  il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{se esiste e lo si indica con } f'(x).$$

La quantità  $h$  prende il nome di **incremento della variabile**, mentre  $f(x+h) - f(x)$  prende il nome di **incremento della funzione**; il rapporto  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  viene detto perciò **rapporto incrementale**.

Calcoliamo ad esempio la derivata della funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  secondo la definizione appena data:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2 x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

Calcoliamo ora la derivata di  $f(x) = \sqrt{x}$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nello stesso modo si possono calcolare le derivate delle funzioni  $f_0(x) = b$ ,  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ , e  $f_3(x) = mx + b$  per le quali si trova:  $f'(x) = 0$ ,  $f'(x) = 1$ ,  $f'(x) = 2x$ ,  $f'(x) = m$ .

#### 5. Funzioni differenziabili e non differenziabili.

Alcune funzioni ammettono derivata in alcuni punti e non in altri. Ad esempio la funzione  $f(x) = |x|$  ammette derivata per  $x = 5$  e non per  $x = 0$ .

Def. 5.1. Una funzione si dice **differenziabile** in  $x$  se esiste la sua derivata  $f'(x)$ . Il procedimento che porta al calcolo della derivata si dice **differenziazione**.

## 6. Derivata della somma, differenza e prodotto di due funzioni differenziabili.

Ricaviamo per prima cosa una formula che ci sarà utilissima in seguito facilitando la dimostrazione di moltissimi teoremi.

Th. 6.1. Se  $f$  è una funzione differenziabile nel punto  $a$ , allora

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + hf^*(h)$$

dove  $f^*(h)$  è una funzione infinitesima per  $h$  tendente a zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f^*(h) = 0$$

Dim. La dimostrazione di questo teorema parte dalla definizione di derivata di  $f(x)$  nel punto  $a$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Da un teorema sui limiti si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0$$

Perciò se poniamo  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = f^*(h)$  abbiamo  $\lim_{h \rightarrow 0} f^*(h) = 0$

e quindi dalla relazione precedente:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + hf^*(h) \quad \text{la formula cercata.}$$

Un altro modo di guardare questa formula è quello di considerare:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + f^*(h) \quad \text{con} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f^*(h) = 0$$

questo ci dice che il rapporto incrementale è uguale alla derivata a meno di un infinitesimo. In pratica non si va mai a calcolare  $f^*(h)$ , ci basta sapere che esiste e che ha queste proprietà.

Th. 6.2. Se  $f$  e  $g$  sono ambedue differenziabili in  $a$ , allora  $f+g$  è anche essa differenziabile in  $a$  e la sua derivata è  $f'(a) + g'(a)$ ; analogamente  $f-g$  è differenziabile in  $a$  e la sua derivata è  $f'(a) - g'(a)$ .

Dim. Sia  $s(x) = f(x) + g(x)$ , dobbiamo dimostrare che  $s'(a) = f'(a) + g'(a)$ .

Per definizione di derivata:

$$s'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - [f(a) + g(a)]}{h} =$$

poichè  $f(x)$  e  $g(x)$  sono per ipotesi differenziabili, vale il teorema 6.1. e perciò:

$$f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a) = f(a) + hf'(a) + hf^*(h) + g(a) + hg'(a) + hg^*(h) - f(a) - g(a)$$

=

$$= \lim_{x \rightarrow a} [f'(a) + f''(h) + g'(a) + g''(h)] = f'(a) + g'(a).$$

La dimostrazione per la sottrazione è analoga.

Il prossimo passo è quello di prendere in esame la derivata del prodotto di due funzioni  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ . Da quanto visto sopra si potrebbe pensare che  $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$ , ma questo non è vero. La formula esatta della derivata del prodotto ce la dà il seguente Teorema:

Th. 6.3. Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni derivabili in  $a$ , allora  $f \cdot g$  è anch'essa differenziabile in  $a$  e si ha:

$$p'(a) = f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a).$$

Dim. Applichiamo la definizione di derivata a  $p(x)$ :

$$p'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

poichè per ipotesi  $f(x)$  e  $g(x)$  sono derivabili vale il teorema 6.1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a) + hf'(a) + hf''(h)][g(a) + hg'(a) + hg''(h)] - f(a)g(a)}{h}$$

moltiplicando e semplificando il numeratore diventa:

$$f(a)g'(a) + f(a)g''(h) + f'(a)g(a) + h[g'(a)f'(a) + f''(a)g''(h)] + hf'(a)f''(h) + hf''(h)g(a) + hf''(h)g''(h)$$

$$\text{poichè } \lim_{h \rightarrow 0} f''(h) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} g''(h) = 0$$

rimane  $f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$ .

Cor. 6.1. Se  $g(x)$  è differenziabile in  $a$  e  $c$  è un numero reale, allora  $c \cdot g(x)$  è differenziabile in  $a$  e:

$$[c \cdot g(x)]' = c \cdot g'(x) \text{ per } x = a.$$

Per dimostrarlo basta applicare la formula precedente e ricordare che la derivata di una costante è uguale a zero.

## 7. Derivata di un polinomio.

Applichiamo ora le formule viste in precedenza per ottenere una semplice regola per differenziare i polinomi. Riassumiamo alcuni risultati già ottenuti:

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = x & f'_1(x) = 1, & f_2(x) = x^2 & f'_2(x) = 2x \\ f_3(x) = x^3 = x \cdot x^2 & f'_3(x) = 3x^2 & f_4(x) = x^4 = x \cdot x^3 & f'_4(x) = 4x^3 \end{array}$$

Guardando queste espressioni per le derivate, possiamo dedurre che la derivata di  $f_5(x) = x^5$  sarà  $f'_5(x) = 5 \cdot x^4$  e di conseguenza se  $f_n(x) = x^n$  avremo  $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

Questa supposizione è giusta e ci viene confermata dal seguente teorema:

Th. 7.1. Se  $f_n(x) = x^n$  con  $n$  intero positivo, allora si ha  $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

Dimostriamo questo teorema per induzione completa. Notiamo innanzitutto che il teorema non enuncia una proposizione sola, ma infinite, una per ogni valore di  $n$ .

Per  $n=1$  avremo la proposizione  $S_1$  che ci dice come  $f_1'(x) = 1$ , per  $n = 2$  la proposizione  $S_2$  e cioè  $f_2'(x) = 2x$ , e poi le proposizioni  $S_3, S_4, S_5$ , e così via.

Questo si presta alla **dimostrazione per induzione**, che procede in due passi: prima si dimostra che  $S_1$  è vera (cosa che abbiamo già fatto), poi si dimostra che se  $S_k$  è vera è vera anche  $S_{k+1}$ .

Perciò supponiamo che  $S_k$  sia vera e quindi se  $f_k(x) = x^k$  allora  $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$ , e dimostriamo che  $S_{k+1}$  è vera, cioè  $f_{k+1}'(x) = (k+1)x^k$ .

Per fare questo basta pensare che:

$$f_{k+1}(x) = x \cdot x^k = x \cdot f_k(x).$$

In base alla formula di derivazione del prodotto otteniamo:

$$f_{k+1}'(x) = f_k(x) + x \cdot f_k'(x) = x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (k+1) \cdot x^k.$$

Perciò, poichè la  $S_1$  è vera, è vera anche la  $S_2$  e quindi la  $S_3$  e così via fino alla  $S_n$  che quindi resta dimostrata.

Per mezzo di questo teorema e di quelli precedenti sulla derivata della somma, differenza e prodotto per una costante, possiamo calcolare la derivata di qualunque polinomio.

Ad esempio:

$$f(x) = 8x^5 - x^2 + 2x - 6; \quad f'(x) = 40x^4 - 2x + 2.$$

Calcoliamo la derivata della funzione  $[f(x)]^2$  espressa in termini di  $f(x)$  e  $f'(x)$ .

Possiamo scrivere  $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$  e per la regola di derivazione del prodotto:

$$[f^2(x)]' = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x).$$

Analogamente possiamo calcolare:

$$[f^3(x)]' = [f(x) \cdot f^2(x)]' = f'(x) \cdot f^2(x) + f(x) \cdot 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x).$$

Per induzione completa possiamo quindi dimostrare anche che:

$$[f^n(x)]' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x) \text{ per } n \text{ intero positivo.}$$

## 8. Continuità di funzioni differenziabili.

Abbiamo detto che una funzione  $f(x)$  è continua nel punto  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , il che equivale a dire che  $\lim_{x \rightarrow a} f(a+h) = f(a)$  (basta porre  $x = a+h$ ). Ne segue che:

Th. 8.1. Se  $f$  è differenziabile in  $a$ , allora essa è continua in  $a$ .

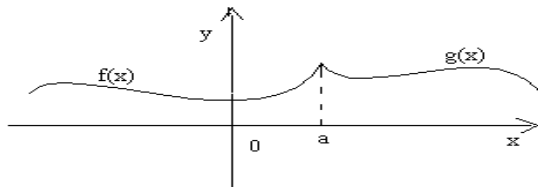
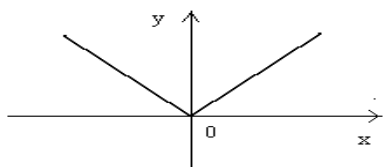
Dim. Poichè  $f$  è differenziabile, possiamo scrivere:

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot f^*(h)$$

da cui risulta

$$\lim_{x \rightarrow a} f(a+h) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} h \cdot f'(a) + \lim_{x \rightarrow a} h \cdot f''(h) = f(a).$$

N.B. Questo teorema dice che una funzione differenziabile in  $a$  è continua ma non l'inverso. Ad esempio  $f(x) = |x|$  è continua in 0 ma non differenziabile. Più in generale potremmo avere una funzione  $h(x)$  ottenuta una vicino all'altra due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ .



$$\text{Poniamo : } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \leq a \\ g(x) & \text{per } x > a \end{cases}$$

Perchè i due pezzi si congiungano con continuità dovrà essere  $f(a) = g(a)$ , ma in  $a$  avremo uno spigolo a meno che le pendenze delle due rette non siano uguali.

Th. 8.2. Siano  $f$  e  $g$  differenziabili in  $a$ , e sia:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \leq a \\ g(x) & \text{per } x > a \end{cases}$$

Allora (1)  $h(x)$  è continua se  $f(a) = g(a)$ , (2)  $h(x)$  è differenziabile se oltre ad essere  $f(a) = g(a)$  è anche  $f'(a) = g'(a)$ .

## 9. Derivata del quoziente.

Dimostriamo la formula di derivazione del quoziente di due funzioni in due passi successivi. Il primo è costituito dal seguente:

Th. 9.1. Sia  $g$  differenziabile in  $a$  e sia  $r(x) = \frac{1}{g(x)}$ .

Allora se  $g(a) \neq 0$ ,  $r(x)$  è differenziabile in  $a$  e si ha:  $r'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$ .

Dim. Dalla definizione di derivata si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h \cdot g(a+h) \cdot g(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a) - g(a) - h \cdot g'(a) - h \cdot g''(h)}{h \cdot g(a+h) \cdot g(a)} \\ &= -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \end{aligned}$$

Come applicazione di questo teorema possiamo estendere la formula di derivazione di  $f_n(x) = x^n$  che avevamo dato per  $n$  positivo, al caso in cui  $n$  sia negativo.

Th. 9.2. Se  $f_n(x) = x^n$  dove  $n$  è intero (positivo o negativo), allora  $f_n'(x) = n x^{n-1}$  (se  $n < 0$  dovrà essere  $x \neq 0$ ).

Dim. Se  $n < 0$  poniamo  $p = -n$  e avremo  $f_n(x) = \frac{1}{x^p}$  con  $p > 0$ . Applichiamo la formula già trovata per la derivata di  $\frac{1}{g(x)}$  e otteniamo  $f_n'(x) = -p \frac{x^{p-1}}{x^{2p}} = -p \cdot x^{-p-1} = n \cdot x^{n-1}$ .

Th. 9.3. Siano  $f$  e  $g$  due funzioni differenziabili in  $a$  e sia inoltre  $g(a) \neq 0$ .

Se  $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  allora  $Q(x)$  è differenziabile in  $a$  e la sua derivata sarà

$$Q'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Dim. Poniamo  $Q(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$  e applichiamo la formula di derivazione del prodotto:

$$Q'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[ -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right] \text{ che calcolata in } a \text{ ci dà la tesi.}$$

## 10. Derivata di una funzione composta.

Le regole che abbiamo ricavato finora ci permettono di calcolare la derivata di un polinomio, di una funzione razionale e della  $\sqrt{x}$ . Non possiamo dire nulla però sulla derivata della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \text{ anche se sappiamo derivare sia la } \sqrt{x} \text{ che la } \frac{x}{x^2+1}.$$

La funzione  $f(x)$  è infatti una funzione composta e ci proponiamo pertanto di determinare la derivata di  $g[f(x)]$ .

Th. 10.1. Sia  $\varphi(x) = g[f(x)]$ . Se  $f$  è differenziabile in  $a$  e se  $g$  è differenziabile in  $f(a)$ , allora  $\varphi$  è differenziabile in  $a$  e si ha

$$\varphi'(a) = g'[f(a)] \cdot f'(a).$$

Dim. Per definizione di derivata  $\varphi'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}$ . Poichè per ipotesi  $f$  è differenziabile in  $a$ , per il teorema 6.1 si ha:  $f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot f^*(h)$  con  $\lim_{h \rightarrow 0} f^*(h) = 0$  e se poniamo  $k(h) = h \cdot f'(a) + h f^*(h)$  possiamo scrivere:

$$f(a+h) = f(a) + k(h) \text{ con } \lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0.$$

$$\text{Perciò } \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \frac{g[f(a) + k(h)] - g[f(a)]}{h} =$$

e poichè per ipotesi  $g$  è differenziabile

$$g[f(a) + k] = g[f(a)] + k \cdot g'[f(a)] + k \cdot g^*(k) \text{ dove } \lim_{h \rightarrow 0} g^*(k) = 0.$$

Quindi

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \frac{k \cdot g'[f(a)] + k g^*(k)}{h} = \frac{k}{h} \{ g'[f(a)] + g^*(k) \}$$

ma poichè  $k = h \cdot f'(a) + h \cdot f^*(h)$  e di conseguenza  $\frac{k}{h} = f'(a) + f^*(h)$  avremo:

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \{g'[f(a)] + g^*(k)\} \cdot \{f'(a) + f^*(h)\}.$$

Passando al limite possiamo quindi concludere che

$$\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{g'[f(a)] + g^*(k)\} \cdot \{f'(a) + f^*(h)\} = g'[f(a)] \cdot f'(a).$$

## 11. Esempi ed applicazioni.

La regola di derivazione di una funzione composta ci permette di risolvere ora il problema dal quale eravamo partiti, e cioè quello della derivazione della funzione

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$$

Infatti possiamo considerare  $\varphi_1(x) = g[f(x)]$  dove  $y = f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  e  $g(y) = \sqrt{y}$

$$\text{Sappiamo che } g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ e che } f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};$$

$$\text{quindi} \quad g'[f(x)] = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Analogamente se  $\varphi_2(x) = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$  posto  $f(x) = x^4 + 8x^2 + 1$  e  $g(y) = \sqrt{y}$  si ottiene:

$$\varphi_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}} \cdot (4x^3 + 16x).$$

**Si può dimostrare (e lo faremo in seguito) che  $[\sin x]' = \cos x$ .**

Se poi  $\varphi_3(x) = \sin(x^2 - 1)$  allora  $\varphi_3'(x) = \cos(x^2 - 1) \cdot 2x$ .

Calcoliamo ora la derivata di  $\cos x$ :

$$[\cos x]' = [\sin(\pi/2 - x)]' = \cos(\pi/2 - x) \cdot (-1) = -\sin x.$$

Per quanto riguarda la tangente:

$$[\tan x]' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Un'ulteriore applicazione la possiamo fare per determinare la derivata di potenze razionali, cioè della funzione  $f(x) = x^{p/q}$  con  $p$  e  $q$  interi e diversi da zero.

Th. 11.1. Se  $f(x) = x^r$  dove  $r$  è un numero razionale, allora  $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$  (se  $r-1$  è negativo sia  $x \neq 0$ ).

Dim. Se  $r$  è un numero razionale avremo  $r = p/q$  con  $p$  e  $q$  interi. Possiamo quindi scrivere  $f^q(x) = x^p$  e differenziare i due membri ottenendo:

$$q \cdot f^{q-1}(x) \cdot f'(x) = p \cdot x^{p-1}. \text{ Ricordando la definizione di } f(x) \text{ si ricava:}$$

$$q \cdot x^{\frac{p}{q}(q-1)} f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

da cui ancora:



$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = r \cdot x^{r-1}.$$

## 12. Derivata di una funzione inversa.

Sia  $g(x)$  una certa funzione crescente, ed  $f(x)$  la sua inversa.

I grafici di  $y = f(x)$  ed  $y = g(x)$  come abbiamo già notato sono simmetrici rispetto alla retta  $y = x$ .

Se  $P$  e  $P'$  sono due punti corrispondenti sulle due curve e se  $P=(a,b)$  allora  $P'=(b,a)$ . E' evidente che  $y = f(x)$  avrà una tangente in  $P$  se  $y = g(x)$  ha una tangente in  $P'$ .

In termini di derivate,  $f$  avrà una derivata in  $a$  se  $g$  ha derivata in  $b$ , tranne il caso in cui  $g'(b) = 0$  e cioè la tangente in  $P'$  è orizzontale per cui la tangente in  $P$  sarebbe verticale e quindi  $f'(a)$  non esisterebbe.

Th. 12.1. Se  $f$  è la funzione inversa di  $g$ , allora  $f'(a)$  esiste se esiste  $g'[f(a)]$  ed è diversa da 0. Questo è un risultato abbastanza intuitivo che non dimostreremo.

Il prossimo passo è quello di trovare una formula per  $f'(a)$  in termini di  $g'(b)$ .

Th. 12.2. Sia  $f$  la funzione inversa di  $g$ . Se  $g$  è differenziabile in  $f(a)$  e  $g'[f(a)] \neq 0$  allora  $f$  è differenziabile in  $a$  e :  $f'(a) = 1/g'[f(a)]$

Dim. Ricordiamo che  $f = g^{-1}$  e quindi  $g[f(x)] = x$  per cui differenziando entrambi i membri si ha  $g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1$  da cui si ricava:  $f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]}$ .

Useremo ripetutamente questa formula in seguito per calcolare le derivate delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche e di  $\log x$ .

Esempi: Vediamo una funzione di cui conosciamo già la derivata  $y = \sqrt{x}$  che è la inversa di  $x = y^2$ . Poichè la funzione  $y = x^2$  è crescente nell'intervallo  $(0, +\infty)$  essa ammette inversa, per cui:

$$y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ come già sapevamo.}$$

Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche, poichè  $y = \arcsin x$  è la inversa della  $x = \sin y$ . La funzione  $y = \sin x$  è crescente nell'intervallo  $(-\pi/2, +\pi/2)$ , mentre la funzione  $y = \cos x$  è decrescente nell'intervallo  $(0, \pi)$ .

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

## 13. Tangente ad una curva.

Data la curva  $y = f(x)$  vogliamo scrivere l'equazione della retta tangente ad essa in un dato punto  $(x_0, f(x_0))$ . L'equazione di una retta qualunque passante per  $(x_0, y_0)$  con

pendenza  $m$  è  $y - y_0 = m(x - x_0)$ . La retta che ci interessa passa per il punto  $(x_0, f(x_0))$  con pendenza  $f'(x_0)$ . Perciò la sua equazione è

$$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0).$$

#### 14. Approssimazione lineare.

Ecco un problema che si presenta di frequente: abbiamo bisogno di stimare il valore di una data funzione in punto  $x$  dove  $f(x)$  è difficile da calcolare. Se  $f(a)$  è noto ed  $a$  è vicino ad  $x$  è naturale cercare una stima di  $f(x)$  incominciando da  $f(a)$ .

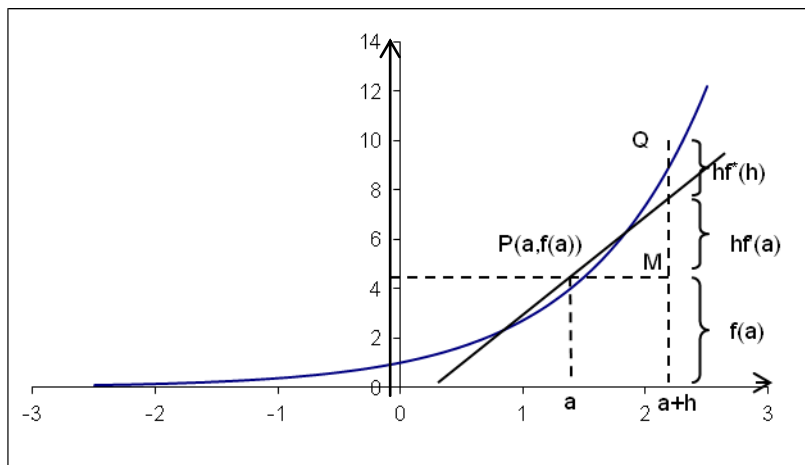
Perciò dato  $f(a)$  cerchiamo un metodo per approssimare  $f(a + h)$  (dove  $h$  è piccolo e può essere sia positivo che negativo) con pochi calcoli. Ancora una volta useremo la famosa formula:

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot f^*(h) \quad \text{con} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f^*(h) = 0,$$

semprechè  $f(x)$  sia derivabile nel punto  $x = a$ . In tal caso, poichè la  $f$  è continua, l'approssimazione di  $f(a + h)$  è data da  $f(a)$  e dalla somma di due ulteriori termini correttivi.

Poichè  $\lim_{h \rightarrow 0} f^*(h) = 0$ , si può dire che il termine  $h \cdot f^*(h)$  è di solito molto piccolo in confronto a  $h \cdot f'(a)$ , essendo infinitesimo di ordine superiore per  $h \rightarrow 0$ . Perciò una ovvia approssimazione per la formula precedente sarà:

$$f(a + h) \approx f(a) + h \cdot f'(a).$$



Questo corrisponde a prendere il valore della funzione in  $a + h$  sulla tangente in  $a$  invece che sulla funzione stessa.

#### 15. Differenziali.

Nella discussione precedente il termine  $f'(a) \cdot h$  ha giocato un ruolo molto importante. A questa quantità viene dato di solito un nome.

Def. 15.1. Se  $f$  è una funzione differenziabile in  $a$  si dice differenziale di  $f$  nel punto  $a$  la funzione lineare  $df_a = f'(a) \cdot h$ .

Notiamo come  $df_a$  dipende strettamente dalla scelta del punto  $a$  e di  $h$ , e possiamo vedere nella figura sotto che  $df_a(h)$  misura la variazione verticale sulla tangente tra  $x = a$  ed  $x = a + h$ .

Di solito, invece di scrivere  $df_a(h)$  si scrive semplicemente  $df$  ed anche  $h$  viene indicato con il simbolo  $dx$  per cui si ha:  $df = f'(a)dx$ .

Possiamo quindi rappresentare la derivata di una funzione con la scrittura:  $\frac{df}{dx} = f'(x)$  che è più vaga della precedente perchè non indica il punto in cui va calcolata la derivata.

### 16. Derivate successive.

Se la derivata  $f'(x)$  di una funzione  $f$  è ancora una funzione differenziabile, la sua derivata verrà detta derivata seconda di  $f(x)$  e sarà indicata con  $f''(x)$ .

Analogamente la derivata di  $f''(x)$  verrà detta derivata terza di  $f(x)$  e sarà indicata con  $f'''(x)$ ; così pure le derivate successive:  $f^{IV}(x), f^V(x)$  etc.

### 17. Formule di Taylor e di Mac Laurin.

Abbiamo già visto la formula che ci permette di ottenere un valore approssimato di  $f(x)$  quando se ne conosca il valore in un punto  $a$  e  $x-a = h$  sia sufficientemente piccolo.

Nel caso già visto abbiamo usato una forma lineare, ma se avessimo usato un polinomio di grado più elevato l'approssimazione tra curva e polinomio sarebbe stata molto migliore. Data una funzione  $f(x)$  sorge quindi il problema di determinare un polinomio che approssimi la funzione in un intorno  $I_r(a)$ , con un grado di approssimazione a nostra scelta.

Questo polinomio lo possiamo trovare sotto certe condizioni e viene espresso dalla formula di Taylor.

Th. 17. 1. Sia  $f(x)$  una funzione continua e derivabile  $n$  volte in un intorno  $I_r(a)$  di ampiezza  $r$  di un punto  $a$ . Detto  $x$  un qualsiasi altro punto dello stesso intervallo risulta (formula di Taylor):

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)^2 \cdot \frac{f''(a)}{2!} + (x - a)^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots + (x - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} +$$

$$(x - a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!} = \sum_{k=0}^n (x - a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + (x - a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!}$$

dove  $\theta$  è un conveniente punto interno all'intervallo  $(a, x)$ .

Non dimostreremo questo teorema. Notiamo che ogni termine della sommatoria è infinitesimo di ordine superiore al precedente per  $x$  tendente ad  $a$ , e che per  $n \rightarrow \infty$  il polinomio coincide con la funzione.

Se poi l'intervallo  $I_r(a)$  contiene l'origine dell'asse delle ascisse si può porre  $a = 0$  nella formula di Taylor, per cui si ottiene una nuova espressione (formula di Mac Laurin):

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + x^3 \frac{f'''(0)}{3!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

Il termine  $R_n = (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$  prende il nome di resto della formula di

Taylor nella forma datagli da Lagrange e rappresenta l'errore che si commette prendendo al posto della funzione  $f(x)$  il suo sviluppo in serie. Esso, in generale non è noto, ma si può calcolare il suo massimo.

Per un grande numero di funzioni  $R_n$  si può rendere trascurabile prendendo  $n$  sufficientemente grande.

Calcoliamo ad esempio il polinomio che approssima la funzione  $\sin x$  in un intorno

dell'origine; le derivate successive di  $\sin x$  sono  $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \dots$  ecc.

Per  $x = 0$  avremo: 0, -1, 0, 1, 0, -1, ecc.

Di conseguenza applicando la formula di Mac Laurin troviamo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

In modo analogo si trova lo sviluppo in serie di Mc Laurin per il coseno di  $x$ :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\text{int}(n/2)+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ e così pure per la tangente.}$$

Per la funzione  $\sin x$ , se vogliamo che l'errore che si commette nell'intervallo  $(-\pi/4, +\pi/4)$  sia minore di  $10^{-6}$  dovremo prendere  $n \geq 7$  poichè se poniamo  $x = \pi/4$  troviamo  $R_5 = 3.6576 \cdot 10^{-5}$  e  $R_7 = 3.1336 \cdot 10^{-7}$ .

## 18. Regola di Dell'Hospital.

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni derivabili in un intorno di ampiezza  $r$  del punto  $a$  e tali che  $f(a) = g(a) = 0$ , mentre  $g(x) \neq 0$  per tutti gli altri punti di  $I_r(a)$ . Perciò il quoziente  $f(x)/g(x)$  è definito in tutti i punti di  $I_r(a)$  tranne  $a$  stesso dove assume la forma indeterminata  $0/0$ .

Sussiste in questo caso il teorema seguente (regola di Dell'Hospital).

Th. 18. 1. Se nel punto  $a$  il quoziente  $f(x)/g(x)$  assume la forma indeterminata  $0/0$ , se

in un intorno di  $a$   $g'(x) \neq 0$  ed esiste finito il limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  allora esiste anche il

limite

del quoziente  $f(x)/g(x)$  e i due limiti sono uguali:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

$$\text{Dim. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (\text{ponendo } x-a=h \text{ e}$$

dividendo numeratore e denominatore per  $h$  e passando al limite).

Ad esempio 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Più in generale se assumono forma indeterminata in  $a$  i quozienti

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f'(x)}{g'(x)}, \dots, \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \text{ mentre } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)} = L \text{ allora}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L$$

Ad esempio: 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Quanto detto vale anche se si considera il limite destro o il limite sinistro.

La regola di Dell'Hospital si estende anche al caso in cui  $f(x)$  e  $g(x)$  tendono all'infinito e quindi il quoziente  $f(x)/g(x)$  assume la forma indeterminata  $\infty/\infty$ , e continua a valere anche nel caso in cui  $a$  sia infinito.

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Se  $f(x)$  tende a 0 e  $g(x)$  tende all'infinito, prodotto assume la forma indeterminata  $0 \cdot \infty$ .

Siccome però risulta  $f \cdot g = \frac{f}{1/g} = \frac{g}{1/f}$  ci si riconduce ad uno dei casi  $\infty/\infty$  o  $0/0$  già visti.

Ad esempio: 
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{x^{-\alpha-1}} = 0$$

Altre forme indeterminate sono  $0^\infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$  si ottengono dalla potenza  $\varphi(x) = f(x)^{g(x)}$ .

Poichè  $\varphi(x) = e^{g(x) \cdot \log f(x)}$  ci si riconduce alle forme indeterminate  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty \cdot 0$  già esaminate.

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \log x} \text{ e poichè}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0 \text{ allora } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1$$

Analogamente si procede per  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} (\log x)^{1/x}$ .

## IX STUDIO DI FUNZIONI

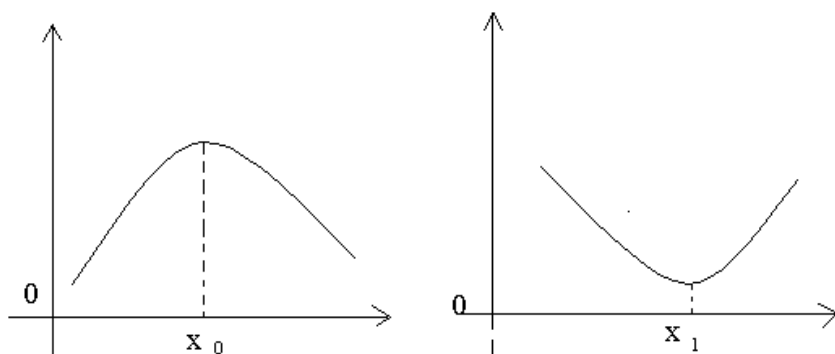
### 1. Massimi e minimi.

Un problema che si presenta molto spesso è quello della determinazione del massimo e del minimo valore che una data funzione assume in una certa parte del suo dominio.

Def. 1.1. Sia  $f$  una funzione definita su un insieme  $S$ . Se  $x \in S$  allora si dice che  $f$  ha un massimo in  $x_0$  se  $f(x_0) \geq f(x)$  per tutti gli  $x \in S$  diversi da  $x_0$ .

Analogamente si dice che una funzione ha un minimo in  $x_1 \in S$  se  $f(x_1) \leq f(x)$  per tutti gli  $x \in S$  diversi da  $x_1$ .

Se  $f$  ha un massimo o un minimo in  $x_2$  si dice che ha un estremo in  $x_2$ .



E' possibile che una funzione abbia più massimi o minimi, come ad esempio  $y = \sin x$  nell'intervallo  $(-6, +6)$ , ma è anche possibile che non ne abbia affatto come  $y = 1/x$  nell'intervallo aperto  $(0, \infty)$ ; in  $(0, 1)$  la funzione  $y = x$  non ha nè massimo nè minimo.

Th. 1.1. Teorema di Weierstrass. Sia  $f$  una funzione *continua* su di un intervallo *chiuso*  $[a, b]$  allora  $f$  ha un massimo e un minimo in  $[a, b]$ .

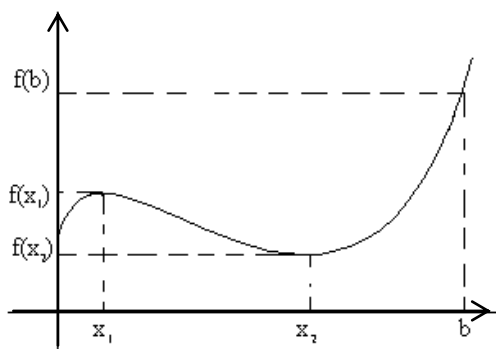
Non dimostreremo questo teorema, ma notiamo che le parole chiave in esso sono "*continua*" e "*chiuso*". Infatti abbiamo appena dato un esempio di funzione continua in un insieme aperto la quale non ha nè massimo nè minimo.

N.B. Una funzione definita su di un intervallo aperto può benissimo avere dei massimi e dei minimi, anche se non è garantito che li abbia. Così pure una funzione che non sia continua. In altre parole, per garantire l'esistenza di un massimo e di un minimo di una data funzione in un intervallo, la condizione che questo sia chiuso e che essa sia continua è sufficiente ma non necessaria.

Andiamo quindi alla ricerca del massimo e del minimo di una funzione in un intervallo chiuso  $[a, b]$ .

Questi possono essere o negli estremi, oppure in punti in cui la funzione non è differenziabile.

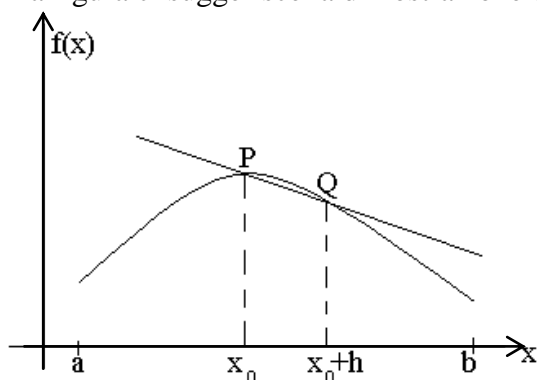
Escludiamo questi casi e supponiamo che  $f$  abbia un massimo all'interno dell'intervallo  $[a, b]$  e che sia differenziabile in tutti i punti di  $(a, b)$ .



Se si ha un massimo in  $x_0$  con  $a < x_0 < b$  ci aspettiamo che la tangente al grafico in  $(x_0, f(x_0))$  sia orizzontale e quindi che  $f'(x_0) = 0$ . Questo fatto è giustificato dal seguente teorema:

Th. 1.2. Sia  $f$  differenziabile in un intervallo aperto  $(a,b)$ . Se  $f$  ha un massimo in un punto  $x_0 \in (a,b)$  allora  $f'(x_0) = 0$ .

Dim. Sappiamo per ipotesi che  $a < x_0 < b$  e che  $f(x_0) \geq f(x)$  per tutti gli  $x \in (a,b)$ . La figura ci suggerisce la dimostrazione del teorema.



Se  $Q = (x_0+h, f(x_0+h))$  è alla destradi  $P = (x_0, f(x_0))$  la pendenza  $s(P, Q)$  della retta  $PQ$  è negativa o uguale a zero. Se  $Q$  è alla sinistra di  $P$ , allora  $s(P, Q)$  è positiva o uguale a zero. La pendenza della tangente è  $\lim_{P \rightarrow Q} s(P, Q)$  che è maggiore o uguale a 0 se  $Q \rightarrow P$  da sinistra, e minore o uguale a zero se  $Q \rightarrow P$  da destra. Poichè la tangente è unica, se deve essere  $\geq 0$  e  $\leq 0$  contemporaneamente essa non può che essere uguale a zero.

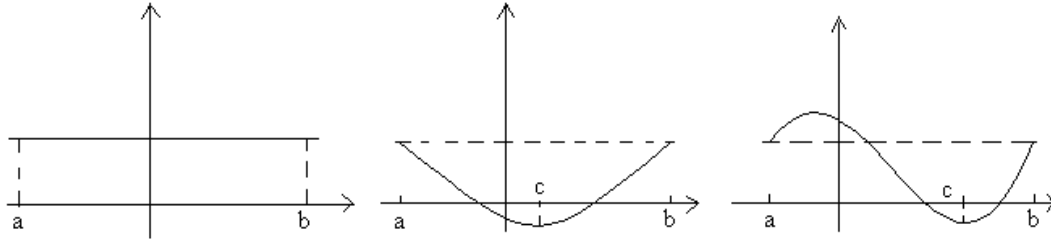
Per una dimostrazione rigorosa notiamo che per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Poichè  $h$  è arbitrario possiamo prenderlo in modo che  $a \leq x_0+h \leq b$  e se  $f$  ha un massimo in  $x_0$  sarà  $f(x_0 + h) < f(x_0)$  per cui  $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ . Di conseguenza il rapporto  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  sarà  $\geq 0$  se  $h$  è positivo, e  $\leq 0$  se  $h$  è negativo. Ne segue quindi che anche  $f'(x_0) \leq 0$  se  $h$  è positivo e  $f'(x_0) \geq 0$  se  $h$  è negativo, per cui concludiamo che  $f'(x_0) = 0$ .

Th. 1.3. Teorema di Rolle. Sia  $f$  una funzione continua in un intervallo chiuso  $[a,b]$  e differenziabile sull'intervallo aperto  $(a,b)$ .

Se  $f(a) = f(b)$  esiste un punto  $c$  dell'intervallo aperto in cui  $f'(c) = 0$ .



Dim. Se  $f$  è una costante allora  $f'(x) = 0$  per tutti gli  $x \in (a,b)$ . Se  $f$  non è costante avrà in  $[a,b]$  un massimo e un minimo.

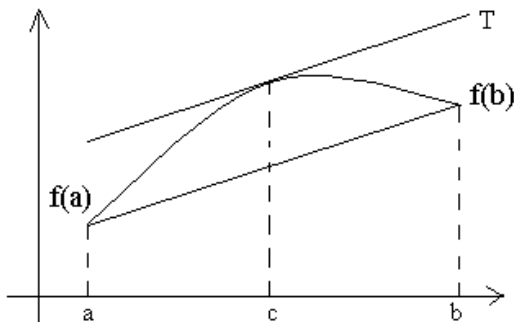
Se massimo e minimo coincidessero,  $f$  sarebbe costante, ma abbiamo già escluso questa eventualità, per cui o il massimo è maggiore di  $f(a)$  oppure il minimo gli è inferiore.

Nel primo caso il massimo sarà in un punto  $c \in (a,b)$  per cui  $f'(c) = 0$  nel secondo caso il minimo.

Th. 1.4. Teorema di Lagrange o del valor medio. Sia  $f$  una funzione continua in un intervallo chiuso  $[a,b]$  e differenziabile sull'intervallo aperto  $(a,b)$ . Esiste allora un punto  $c$  dell'intervallo aperto per cui

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dim. Sia  $y = l(x)$  l'equazione della retta  $L$  congiungente i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . Definiamo ora la funzione  $g(x) = f(x) - l(x)$  che rappresenta la distanza della curva  $y = f(x)$  da  $L$ . Si può verificare che  $g(a) = g(b) = 0$ . Inoltre  $g(x)$  è differenziabile in  $(a,b)$  poichè  $f$  lo è per ipotesi ed  $l(x)$  è differenziabile ovunque.



Quindi  $g(x)$  soddisfa le condizioni del teorema di Rolle e perciò esiste un punto  $c \in (a,b)$  in cui  $g'(c) = 0$ .

Poichè  $g(x) = f(x) - l(x) = f(x) - (mx + d)$  si ha  $g'(x) = f'(x) - m$ , e ponendo  $g'(c) = 0$  si ottiene  $f'(c) - m = 0$  e quindi  $f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .



C'è un'immediata applicazione di questo teorema. Sappiamo già che se  $f$  è una costante la sua derivata è uguale a zero.

Th. 1.5. Sia  $f$  continua in un intervallo chiuso  $[a,b]$  e differenziabile sull'intervallo aperto  $(a,b)$ . Se  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in (a,b)$  allora  $f$  è costante su  $[a,b]$ .

Dim. Dimostriamo che per ogni  $x \in [a,b]$  si ha  $f(x) = f(a)$ , e cioè  $f(x)$  assume lo stesso valore in tutti i punti dell'intervallo. Prendiamo un punto qualunque  $x_1 \in [a,b] \neq a$ . Nell'intervallo chiuso  $[a,x_1]$   $f$  è continua e differenziabile nell'intervallo aperto  $(a,x_1)$ . Possiamo quindi applicare il teorema di Lagrange per cui  $f(x_1) - f(a) = f'(c)(x_1 - a)$  e poichè  $f'(c) = 0$  avremo  $f(x_1) = f(a)$ .

Essendo  $x$  un punto qualunque dell'intervallo  $(a,b)$  possiamo concludere che  $f$  è costante.

Cor. 1.1. Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue su  $[a,b]$  e differenziabili su  $(a,b)$ . Se  $f'(x) = g'(x)$  per ogni  $x \in (a,b)$  allora esiste una costante  $k$  tale che  $f(x) - g(x) = k$  per ogni  $x \in [a,b]$ . In altre parole, se due funzioni hanno la stessa derivata differiscono per una costante.

## 2. Studio di curve piane.

Data una funzione  $f$  vogliamo usare gli strumenti del calcolo per ottenere informazioni sull'andamento della curva  $y = f(x)$ .

Ad esempio vogliamo trovare dove la curva è crescente o decrescente, dove ci sono massimi, minimi, ecc..

Sappiamo già che cosa significa che una funzione è crescente o decrescente. La crescenza di una funzione è legata alla sua derivata:

Th. 2.1. Sia  $f$  una funzione continua su di un intervallo chiuso  $[a,b]$  e differenziabile su  $(a,b)$ ;

- 1) Se  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in (a,b)$  allora  $f$  è crescente su  $[a,b]$ ;
- 2) Se  $f'(x) < 0$  " " " " decrescente " " .

Dim. Per ipotesi sia  $f'(x) > 0$  su  $(a,b)$  e siano  $x_1$  e  $x_2$  due punti di  $[a,b]$ ;  $f$  sarà continua su  $[x_1, x_2]$  e differenziabile su  $(x_1, x_2)$ , quindi per il teorema di Lagrange:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \text{ con } x_2 < c < x_1.$$

Poichè  $f'(c) > 0$  e  $x_2 > x_1$   $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$  e quindi  $f(x_2) > f(x_1)$ . Analogamente si dimostra la 2).

## 3. Concavità e convessità.

Consideriamo la funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$  e derivabile in  $(a,b)$  quante volte sia necessario. Sia  $x_0 \in (a,b)$  e proponiamoci di studiare l'andamento della funzione in un intorno di  $(x_0, f(x_0))$ .

A tale scopo consideriamo la tangente alla curva nel punto  $(x_0, f(x_0))$ , essa sarà  $y = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$ .

Def. 3.1. Si dice che il grafico della funzione  $f$  rivolge la concavità verso l'alto se c'è un intervallo  $(a,b)$  contenente  $x$  tale che in tutto  $(a,b)$  il grafico stia sopra la retta

tangente al grafico stesso in  $(x_0, f(x_0))$ , tranne che nel punto di tangenza. Se in tutto  $(a, b)$  il grafico sta tutto sopra la retta tangente tranne che nel punto di tangenza, si dirà che la funzione  $f$  rivolge la concavità verso il basso.

Se comunque preso un intorno completo di  $x_1$  il grafico sta sempre parte sopra e parte sotto la tangente diremo che  $x$  è un punto di flesso.

Consideriamo la funzione  $f(x)$  nel suo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto  $x_0$  dove è derivabile infinite volte:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + (x - x_0)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \cdot \frac{f'''(x_0)}{3!} + \dots + (x - x_0)^n \cdot \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

e chiamiamo  $\Delta(x)$  la differenza tra funzione e retta tangente in  $x$

$$\Delta(x) = (x - x_0)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \cdot \frac{f'''(x_0)}{3!} + \dots + (x - x_0)^n \cdot \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Dal segno della  $\Delta(x)$  potremo vedere se la  $f(x)$  rivolge la concavità verso l'alto o verso il basso.

Per studiare il segno di  $\Delta(x)$  basta studiare il primo termine diverso da zero perchè i successivi sono infinitesimi di ordine superiore e quindi non in grado di influire sul segno del termine precedente.

Se  $f''(x_0) > 0$  la concavità sarà rivolta verso l'alto perchè  $(x - x_0)^2$  non cambia segno al passaggio di  $x$  da sinistra a destra di  $x_0$ .

Se  $f''(x_0) < 0$  la concavità sarà rivolta verso il basso.

Se  $f'(x_0) = 0$  la tangente in  $x_0$  è orizzontale e quindi in  $x_0$  abbiamo un estremo che sarà un punto di massimo se la concavità è rivolta verso il basso,  $f''(x_0) < 0$ , o un punto di minimo se la concavità è rivolta verso l'alto,  $f''(x_0) > 0$ .

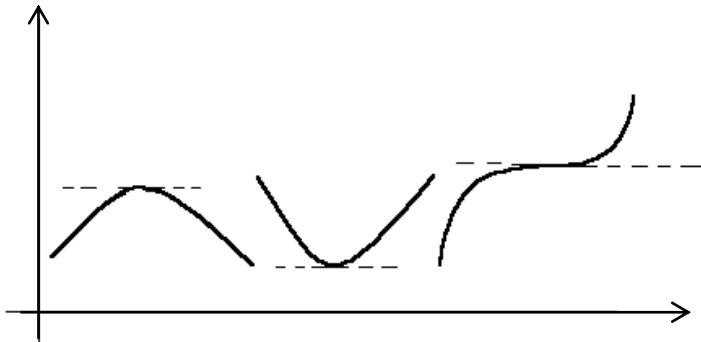
Se  $f''(x_0) = 0$  ed  $f'''(x_0) \neq 0$  il primo termine di  $\Delta(x)$  sarà  $f'''(x_0)(x - x_0)^3$  che cambia segno al passaggio di  $x$  da destra a sinistra di  $x_0$ .

Quindi non esiste un intorno di  $x_0$  in cui la funzione stia tutta sopra o tutta sotto la retta tangente e perciò il punto  $x_0$  è un punto di flesso.

Il flesso lo diremo crescente se  $f'''(x_0) > 0$ , decrescente se  $f'''(x_0) < 0$ .

Se  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) = 0$ , e  $f'''(x_0) \neq 0$  avremo un flesso orizzontale.

Questo ragionamento si può ripetere anche quando le prime  $k-1$  derivate calcolate in  $x_0$  sono nulle. Se la  $k$ -esima derivata (e cioè la prima diversa da zero) è di ordine pari, avremo in  $x_0$  un massimo o un minimo; se è di ordine dispari avremo un punto di flesso.



#### 4. Studio di una funzione.

Abbiamo fin qui sviluppato ed esaminato dei mezzi di calcolo che ci permettono di studiare il comportamento del grafico di una funzione.

Per questo studio si segue di solito il seguente procedimento:

- Determinare il campo di definizione della funzione;
- Calcolare i punti di intersezione con gli assi coordinati;
- Determinare il segno della funzione ed eventuali simmetrie;
- Determinare il comportamento della funzione agli estremi del campo di definizione, gli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui;
- Calcolare i massimi, minimi e i punti di flesso;
- Tracciare il grafico della funzione calcolando eventualmente il suo valore in qualche punto di particolare interesse.

**Esempio. 1.** Consideriamo la funzione  $f_1(x) = x^2 - 2x - 3$

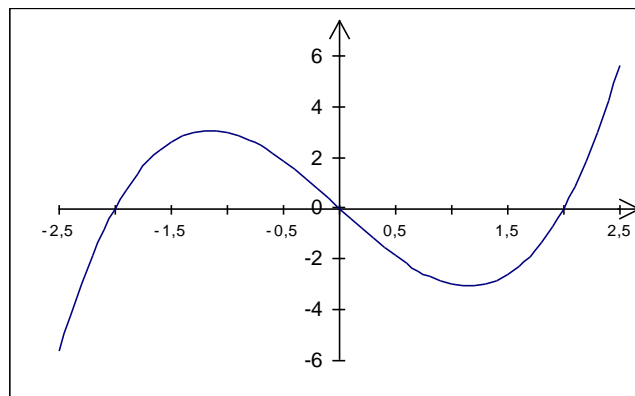
- La funzione è definita per qualunque valore reale di  $x$ .
- $f(x) = 0$  per  $x_1 = -1, x_2 = 3$ .
- $f(x)$  è negativa per valori di  $x$  compresi nell'intervallo  $(-1, 3)$  e positiva altrove. Non è simmetrica
- Essendo una funzione polinomiale di ordine pari essa tende a  $+\infty$  per  $x$  tendente a  $\pm\infty$  poichè il coefficiente di grado massimo è positivo.
- $f'(x) = 2x - 2; f''(x) = 2$  La derivata prima si annulla per  $x = 1$  dove la derivata seconda è positiva (concavità rivolta verso l'alto) e quindi si ha un punto di minimo.

**Esempio. 2.** Consideriamo la funzione:  $f_2(x) = x^3 - 4x$ .

- La funzione è definita per qualunque valore reale di  $x$ .
- $f(x) = 0$  per  $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = +2$ .
- $f(x)$  è positiva per valori di  $x$  compresi nell'intervallo  $(-2,0)$  e  $(2,+\infty)$ . Poichè risulta  $f(-x) = -f(x)$  la funzione presenta simmetria dispari.
- Essendo una funzione polinomiale di ordine dispari essa tende a  $\pm\infty$  per  $x$  tendente a  $\pm\infty$  poichè il coefficiente di grado massimo è positivo.
- $f'(x) = 3x^2 - 4; f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$ .

La derivata prima si annulla in  $x_{1,2} = \pm 2/\sqrt{3}$ , è positiva per  $x$  esterno all'intervallo delle due radici (funzione *crescente*) e negativa all'interno di detto intervallo (*decescente*). In  $x_1$  la derivata seconda è negativa e quindi avremo un *massimo*, in  $x_2$  positiva. e quindi avremo un *minimo* perchè la concavità è rivolta verso l'alto. La derivata seconda si annulla nell'origine dove si ha un *punto di flesso* crescente poichè la derivata terza è positiva.

Calcolando il valore della funzione nei punti di massimo e minimo si trova  $f(x_1) = -3.1$  e rispettivamente  $f(x_2) = 3.1$ . Si può quindi tracciare il grafico della funzione.



**Esempio 3.** Consideriamo la funzione:  $f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$

Il campo di definizione è tutto l'asse reale tranne i punti nei quali si annulla il denominatore:  $x^2 - 4 = 0$  e cioè  $x_1 = -2$  e  $x_2 = +2$ .

La funzione non presenta simmetrie evidenti ed il suo segno sarà positivo quando numeratore e denominatore saranno concordi, altrimenti negativo. Troviamo quindi le radici del numeratore ponendo:  $x^2 - 2x - 3 = 0$  da cui si ricava:  $x_1 = -1$  e  $x_2 = +3$ ; e del denominatore  $x^2 - 4 = 0$  con  $x_3 = -2$  e  $x_4 = +2$ .

Perciò la funzione sarà positiva nell'intervallo  $(-\infty, -2)$ ;  $(-1, +2)$ ;  $(3, +\infty)$  e negativa altrove.

Nei punti in cui si annulla il numeratore la curva attraversa l'asse delle ascisse, nei punti in cui si annulla il denominatore la funzione non è definita e tende all'infinito quando  $x$  tendeva a  $x$ .

In particolare:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$  poichè la funzione è positiva per  $x < -2$  e per lo stesso motivo

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ . Gli altri estremi del campo di definizione sono  $\pm\infty$ , quindi calcoliamo i

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ . Avremo quindi due asintoti orizzontali per  $x = -2$  e  $x = 2$  ed un asintoto orizzontale di

equazione  $y = 1$ . Possiamo già tracciare un grafico approssimativo della funzione, ma vogliamo vedere se ci sono dei punti di massimo, di minimo o di flesso.

Per questo dobbiamo calcolare le derivate prima e seconda per vedere se e in quali punti si annullano.

$$y' = \frac{(2x-2)(x^2-4) - 2(x^2-2x-3)}{(x^2-4)^2} = 2 \frac{x^2 - x + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

Poichè il discriminante del numeratore  $\Delta = -7$  è negativo, la  $y'$  non si annulla mai ed è sempre positiva per ciò la funzione sarà sempre crescente.

La derivata seconda sarà: 
$$y'' = -2 \frac{2x^3 + 9x^2 + 24x + 12}{(x^2 - 4)^3}$$

Se non è facile trovare per quali valori di  $x$  si annulla  $y''$ , si vede facilmente che  $x = -1/2$   $y'' > 0$  e per  $x = -2/3$   $y'' < 0$  dimodochè il flesso cade tra i due punti.

Possiamo quindi tracciare il grafico della funzione calcolandone il valore in qualche punto, come ad esempio  $x = 0$  e  $x = 3/4$ .

**Esempio 4.** Studiare la funzione:  $f_4(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$

Il dominio della funzione si estende da  $-\infty$  a  $+\infty$  con  $x \neq \pm 1$  che sono le radici del denominatore. La funzione presenta simmetria dispari essendo  $f(-x) = -f(x)$ . Essa è simmetrica rispetto all'origine e quindi ci si potrebbe limitare a studiarla solo tra  $0$  e  $+\infty$ .

Il segno della funzione sarà positivo per  $x > 1$  e per  $-1 < x < 0$ , negativo altrove.

Agli estremi del campo di definizione abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Cerchiamo ora di determinare un eventuale asintoto obliquo di equazione generica  $y = mx + q$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^3 - x} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0.$$

Perciò la retta  $y = x$  è un asintoto obliquo.

**Esempio 5.** Studiare le funzioni:  $f_5(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

**Esempio 6.**  $f_6(x) = \sqrt{f_5(x)}$

**Esempio 7.** Studiare le funzioni:  $f_7(x) = e^{f_5(x)}$   
 $\ln(f_5(x))$

**Esempio 8**  $f_8(x) =$

**Esempio 9.** Studiare la funzione:

$$f_9(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

# GLI INTEGRALI

## 1. Integrale definito.

Sviluppiamo in questo capitolo alcuni concetti per le funzioni limitate e vedremo poi come é possibile estenderli a funzioni che non siano limitate.

Def. 1.1. Una funzione si dice *limitata* quando il suo codominio é un insieme limitato.

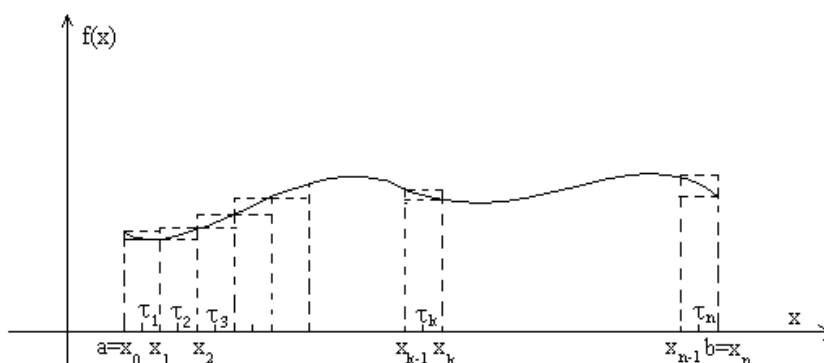
Sia dunque  $y = f(x)$  una funzione limitata nell'intervallo  $[a,b]$ . Su tale intervallo prendiamo  $n+1$  punti  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  con  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_{n-1} < x_n = b$  in modo che l'intervallo  $[a,b]$  resta diviso in  $n$  intervallini  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3] \dots [x_{n-1}, x_n]$ .

Indichiamo con  $\delta_j$  l'ampiezza dell'intervallo  $j$ -esimo e cioé  $\delta_j = x_j - x_{j-1}$  con  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  e sia  $\delta$  il massimo tra gli  $n$  numeri  $\delta_j$  :  $\delta = \max(\delta_j)$ .

Prendiamo ad arbitrio nel primo intervallo un punto  $\tau_1$ , nel secondo un punto  $\tau_2, \dots$  nell'ennesimo un punto  $\tau_n$  e calcoliamo la funzione  $f(x)$  in quei punti  $f(\tau_1), f(\tau_2), \dots, f(\tau_n)$ .

Consideriamo poi la somma:

$$S_\delta = f(\tau_1) \delta_1 + f(\tau_2) \delta_2 \dots f(\tau_n) \delta_n = \sum_{j=1}^n f(\tau_j) \delta_j$$



Def. 1.2. La somma  $S_\delta$  si dice *somma integrale* della funzione  $f(x)$  e il suo valore varia al variare di  $\delta$  e dei punti  $\tau_j$ .

Si può dimostrare che esiste finito il limite  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta = J$ .

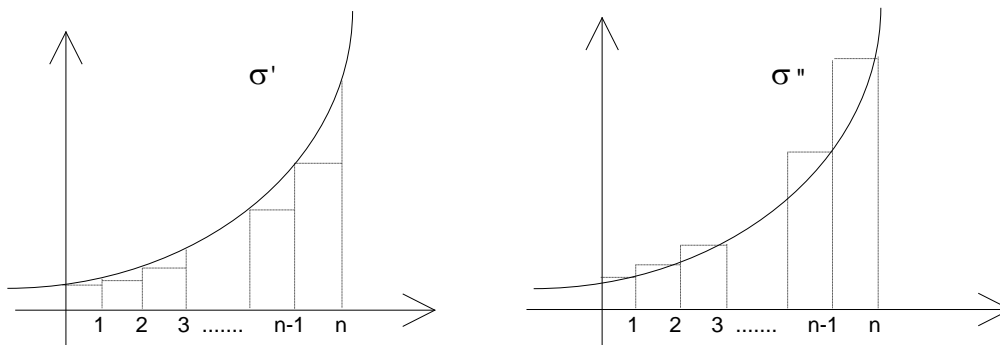
Def. 1.3. Il limite  $J$  si dice l'integrale definito tra  $a$  e  $b$  della funzione  $f(x)$  e lo si indica con il simbolo  $\int_a^b f(x) dx$ . Si pone cioé  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta = J = \int_a^b f(x) dx$ .

Possiamo quindi affermare che l'integrale definito tra  $a$  e  $b$  di una funzione limitata  $f(x)$  é il limite cui tendono le somme integrali  $S_\delta$  al tendere a 0 della massima ampiezza delle suddivisioni dell'intervallo  $[a,b]$ .

Abbiamo detto che i punti  $\tau_j$  sono presi a caso nei rispettivi  $\delta_j$ , ma se ad esempio li prendiamo in modo che  $f(\tau_j)$  coincida con il minimo  $m_j$  di  $f(x)$  in  $[x_{j-1}, x_j]$ , la corrispondente somma integrale che indichiamo con

$$\sigma_{\delta}' = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \dots + m_n\delta_n = \sum_{j=1}^n m_j\delta_j \text{ si dirà somma integrale per difetto.}$$

Se invece prendiamo i  $\tau_j$  in modo che  $f(\tau_j)$  coincida con il massimo  $M_j$  di  $f(x)$  in  $[x_{j-1}, x_j]$ , la somma:  $\sigma_{\delta}'' = \sum_{j=1}^n M_j\delta_j$  si dirà somma integrale per eccesso.



Da quanto visto prima si ha che  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\delta}' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\delta}'' = \int_a^b f(x) dx$

## 2. Proprietà dell'integrale definito.

Notiamo che se due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  sono limitate e quindi integrabili in un intervallo  $[a,b]$ , lo è anche la loro somma, la differenza, il prodotto e il quoziente (se  $g(x) \neq 0$ ). Lo stesso vale per la funzione composta  $g[f(x)]$  e la funzione inversa.

Dalla definizione che abbiamo dato per l'integrale definito scendono quindi immediatamente alcune proprietà:

Pr. 2.1. Se  $f(x)$  è integrabile in  $[a,b]$ :

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Def. 2.1. Poniamo in base alla definizione di integrale definito

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

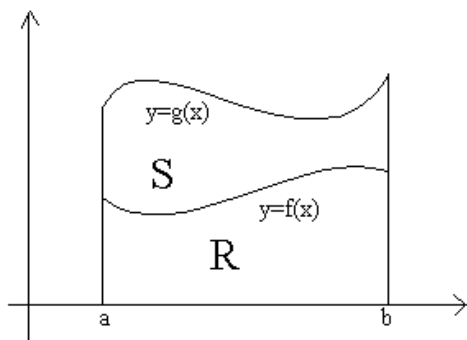
Pr. 2.2. Una costante moltiplicativa si può portare fuori o dentro il segno di integrale:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (c \text{ costante reale}).$$

Pr. 2.3. Se  $f(x) = m$ , costante su tutto  $[a,b]$  risulta:  $\int_a^b m \cdot dx = m(b-a)$

Pr. 2.4. L'integrale della somma o differenza di due funzioni é uguale alla somma o differenza degli integrali delle due funzioni:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (\text{proprietà distributiva dell'integrale}).$$



Pr. 2.5. Se  $f(x)$  é una funzione integrabile negli intervalli  $[a,c]$  e  $[c,b]$  si ha:

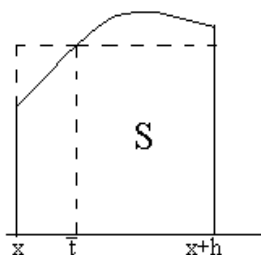
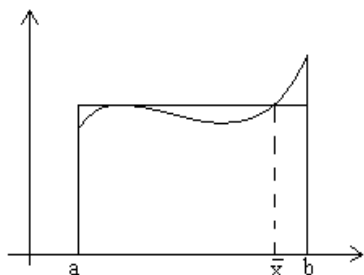
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{proprietà additiva dell'integrale}).$$

Diamo solo l'enunciato di un teorema molto importante.

Th. 2.1. Teorema della media. Se  $f(x)$  é una funzione continua nell'intervallo  $[a,b]$  esiste un punto  $\tau \in [a,b]$  in cui

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\tau)$$

Il numero  $f(\tau) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  si dice *valor medio* della funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $[a,b]$ .



### 3. Superfici e derivate.

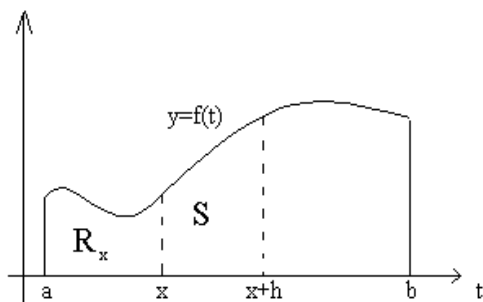
Ci proponiamo di trovare una relazione tra il concetto di integrale e quello di derivata. La questione non é intuitiva, e per affrontarla ci poniamo una domanda: "come varia la superficie quando varia la regione o la figura che stiamo misurando?".



Questa é una domanda piuttosto vaga perché la regione in esame può variare in molti modi. Per fissare le idee consideriamo una funzione  $f$  continua e positiva su  $[a,b]$  e sia  $t$  la sua variabile indipendente.

Sia  $R$  la regione limitata dal grafico  $y = f(t)$  e dalle rette  $t = a$ ,  $t = b$  e  $y = 0$ . Sia poi  $x$  un punto qualunque di  $[a, b]$  ed  $R_x$  la regione limitata da  $y = f(t)$ ,  $t = a$ ,  $t = x$ , e  $y = 0$ . Perciò  $R_a$  sarà una regione degenerata costituita da un segmento, mentre  $R_b = R$ . Ci riproponiamo ora la domanda di prima "come varia la superficie di  $R_x$  quando varia  $x$ " e cerchiamo di dare una risposta.

Se  $A_x$  é l'area della regione  $R_x$ , in termini d'integrale definito si ha:



$$A(b) = \int_a^b f(t)dt \quad \text{e più in generale} \quad A(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Abbiamo così una nuova funzione  $A$  definita per tutti gli  $x \in [a,b]$ , e chiederci come varia  $A$  al variare di  $x$  equivale a chiederci quale sia la sua derivata  $A'(x)$  che ora ci proponiamo di determinare.

Sia  $h$  un numero positivo e supponiamo che tanto  $x$  che  $x+h$  appartengano ad  $[a,b]$ . Consideriamo le regioni  $R_x$ ,  $R_{x+h}$  ed  $S$ .

Si ha che  $R_{x+h} = R_x + S$  e quindi  $A(x+h) = A(x) + \text{area di } S$ , per cui  $A(x+h) - A(x) = \text{area di } S$ .

Concentriamo la nostra attenzione su  $S$ ; per il teorema della media la sua area é uguale all'area del rettangolo avente per base l'intervallo  $[x,x+h]$  e per altezza il valore  $f(\tau)$  con  $\tau \in [x,x+h]$ . Cioé  $A(S) = h \cdot f(\tau)$  e quindi  $A(x+h) - A(x) = h \cdot f(\tau)$  e

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\tau)$$

Poiché per ipotesi  $f$  é continua  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$  e quindi se  $h$  tende a 0,  $x+h$  tende a  $x$ , e di conseguenza anche  $\tau$  tende a  $x$ .

Perciò: 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x).$$

Lo stesso ragionamento vale per  $h < 0$  per cui possiamo dire di aver trovato che

$$A'(x) = f(x) \quad \text{oppure} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \cdot dt = f(x);$$

oppure, in altre parole, la funzione area  $A(x)$  ha come derivata la funzione originale  $f(x)$ . Quello che ora abbiamo visto può essere espresso dal seguente teorema:

**Th. 3.1.** Sia  $f$  una funzione continua su  $[a,b]$ . Se definiamo la funzione  $G(x) = \int_a^x f(x)dx$  per ogni  $x \in [a,b]$ , allora  $G'(x) = f(x)$  per tutti gli  $x \in [a,b]$ .

Inoltre se  $F(x)$  é una funzione la cui derivata é  $f(x)$ , ponendo  $G(x) = F(x) + c$ , e poiché  $G(a) = F(a) + c = 0$ ,  $c = -F(a)$  si ha allora  $G(x) = F(x) - F(a)$ .

Th. 3.2. **Teorema fondamentale del calcolo integrale.** Sia  $f$  una funzione integrabile su  $[a,b]$  e sia  $F'(x) = f(x)$  per tutti gli  $x \in [a,b]$ . Allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Il teorema fondamentale é un risultato molto potente. Per una vasta gamma di funzioni (tutte le funzioni continue ad es.) questo teorema sostituisce il problema del calcolo dell'integrale con il problema di trovare, data che sia una funzione  $f$ , un'altra funzione la cui derivata é  $f$ . Tale funzione si chiama la *primitiva* di  $f$ .

In tale modo si possono trovare per il calcolo degli integrali delle utili formule che eliminano calcoli laboriosi come quelli che abbiamo visto nella definizione di integrale come limite di  $S$ .

Calcoliamo ad esempio:  $\int_0^1 x^2 dx$ . Ricordiamo che  $\frac{d}{dx} \frac{1}{3} x^3 = x^2$  e di conseguenza:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

#### 4. Integrale indefinito.

Abbiamo già messo in evidenza l'importanza di trovare una funzione  $F$  la cui derivata sia una data funzione  $f$ .

Def. 4.1. Sia  $f$  una funzione integrabile su  $[a,b]$ . Se esiste una funzione  $F$  differenziabile su  $[a,b]$  e tale che  $F' = f$ , allora  $F$  si dirà una *primitiva* di  $f$ .

Nota una primitiva  $F$  di una funzione  $f$  possiamo determinare facilmente tutte le primitive di  $f$ . Esse saranno funzioni del tipo  $F + k$  dove  $k$  é una costante arbitraria, essendo che due funzioni aventi uguale derivata su di un intervallo differiscono per una costante.

Def. 4.2. L'insieme delle primitive di una funzione  $f$  si indica con il simbolo  $\int f(x) \cdot dx$  (integrale di effe di ics in di ics) e viene chiamato *l'integrale indefinito* della funzione  $f(x)$ .

Quando abbiamo trovato una primitiva  $F$  di  $f$  scriviamo:  $\int f(x) \cdot dx = F(x) + k$  e diciamo che abbiamo *integrato* la  $f$ , oppure che *abbiamo trovato l'integrale indefinito* di  $f$ . Perciò se  $f(x) = 5x^4$  allora  $F(x) = x^5$  é una primitiva di  $f$  poiché  $F'(x) = f(x)$  e scriviamo  $\int 5x^4 \cdot dx = x^5 + k$ .

La funzione  $f(x)$  che si trova tra il segno di integrale e quello di differenziale viene detta *funzione integranda*.

Ci occuperemo più tardi dei metodi che permettono di determinare la primitiva di una funzione. Per ora limitiamoci a ricordare che poiché

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \quad \text{si ha che} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

Questa formula ci permette di trovare l'integrale indefinito di tutti i polinomi.

$$\begin{aligned} \text{Ad esempio } \int (8x^3 - 5x^2 + x + 3) \cdot dx &= \int 8x^3 \cdot dx - \int 5x^2 \cdot dx + \int x \cdot dx + \int 3 \cdot dx = \\ &= 2x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + k. \end{aligned}$$

Tale formula è valida per tutti i valori di  $n$  tranne che  $n = -1$ .

Se  $n = -1$  ci troviamo di fronte ad una situazione molto imbarazzante. Infatti non riusciamo a trovare tra le funzioni che conosciamo quella che ha come derivata  $1/x$ . Perciò  $\int 1/x \, dx$  sarà una funzione nuova, una funzione che finora non abbiamo definito e che potrebbe venir definita proprio come l'integrale indefinito di  $1/x$ . L'integrale definito di una funzione razionale non è necessariamente una funzione razionale ma può essere una funzione trascendente.

## XI FUNZIONI TRASCENDENTI

### 1. Esponenziali e logaritmi.

Una delle funzioni trascendenti più comunemente usata é la funzione esponenziale.

Def. 1.1. Si dice funzione esponenziale una funzione del tipo  $f(x) = a^x$  con  $a$  positivo e diverso da 1.

Questa funzione é definita per qualunque valore di  $x$  e avrà un andamento diverso a seconda che  $a > 1$  oppure  $a < 1$ .

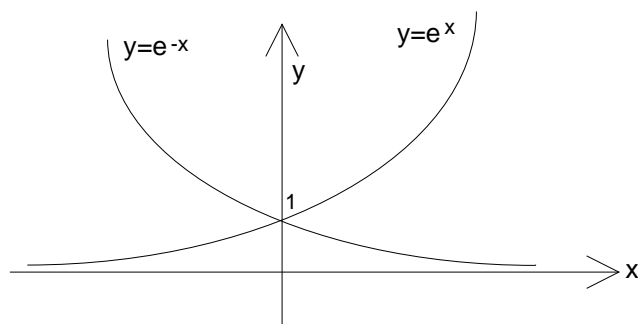
In generale la funzione esponenziale ha le seguenti proprietà:

a) Se  $a > 1$ , per  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0$  mentre per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Se  $a < 1$ , per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0$  e per  $x \rightarrow -\infty$   $f(x) \rightarrow +\infty$ . In ambedue i casi per  $x = 0$ ,  $f(x) = 1$ .

b) La funzione é sempre positiva.

c) Se  $a > 1$  la funzione é sempre crescente, se  $a < 1$ , decrescente. In ambedue i casi é monotona (lo dimostreremo in seguito).



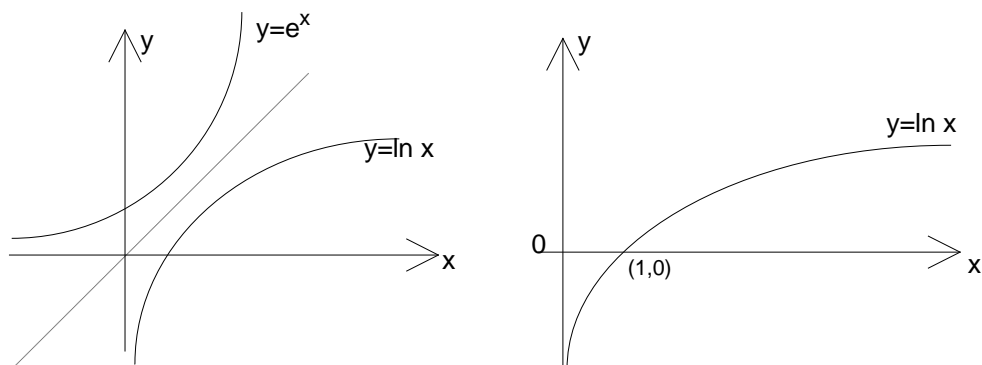
Poiché  $a^x$  é una funzione monotona su tutto l'asse reale, essa ammette una funzione inversa. Il dominio della funzione inversa, uguale al codominio della diretta, é  $(0, +\infty)$ , mentre il suo codominio, uguale al dominio della  $a^x$ , sar   $(-\infty, +\infty)$ .

Fissato un numero  $x$ , la funzione inversa ci dar  quel numero  $y$  tale che  $a^y = x$ .

Questo definisce una nuova funzione che chiameremo *logaritmo in base a* di  $x$ .

Def. 1.2. Logaritmo in base  $a$  di  $x$  é il numero  $y$  cui bisogna elevare la base  $a$  per ottenere il numero  $x$  assegnato:  $y = \log_a x$ .

Essendo la funzione logaritmo inversa della esponenziale, il suo grafico sarà simmetrico di quello di  $a^x$  rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.



Le proprietà della funzione  $y = \log_a x$  si desumono da quelle della  $y = a^x$ . Sia  $a > 1$ .

a') La funzione logaritmo é definita per valori di  $x > 0$ ; cioè non esistono logaritmi di numeri negativi.

b') Il logaritmo della base é 1;  $\log_a a = 1$ . Il logaritmo di 1 é 0 qualunque sia il valore di  $a$ . Il logaritmo é negativo per  $x < 1$  e positivo per  $x > 1$ . Per  $x$  tendente a 0 il  $\log_a x$  tende a  $-\infty$  e per  $x$  tendente a  $+\infty$  esso tende a  $+\infty$ .

c') La funzione  $\log_a x$  é sempre crescente nel suo campo di definizione (se  $a > 1$ ).

Nei calcoli che fanno uso dei logaritmi, si ricorre spesso ad alcune regole che vengono espresse dai seguenti teoremi:

Th. 1.1. Il logaritmo del prodotto di due numeri é uguale alla somma dei logaritmi dei due numeri:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Dim. Sia  $x_1 = \log_a b$  e  $x_2 = \log_a c$  da cui  $b = a^{x_1}$  e  $c = a^{x_2}$ .

Moltiplicando  $b \cdot c = a^{x_1 + x_2}$  si ha  $x_1 + x_2 = \log_a(b \cdot c)$  e cioè:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c).$$

In modo analogo si possono dimostrare i teoremi seguenti:

Th. 1.2. Il logaritmo del rapporto di due numeri é uguale alla differenza dei logaritmi dei due numeri:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Th. 1.3. Il logaritmo della potenza m-esima di un numero é uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base:

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b.$$

Th. 1.4. Il logaritmo della radice n-esima di un numero é uguale al rapporto tra il logaritmo del radicando e l'indice della radice:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Def. 1.3. Si dice *sistema di logaritmi* l'insieme dei logaritmi di tutti i numeri reali in una stessa base.

I sistemi di logaritmi di gran lunga più usati sono due: logaritmi decimali (o volgari o di Briggs) che sono in base 10, e i logaritmi naturali (o neperiani) che hanno per base il numero irrazionale:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71828182845.....$$

E' quindi importante trovare una formula che permetta di passare da un sistema di logaritmi ad un altro.

Supponiamo infatti di conoscere il logaritmo di x nella base a, vogliamo trovare il logaritmo di x nella base b; cioè, noto

$$y_1 = \log_a x \text{ cerchiamo } y_2 = \log_b x.$$

Poiché per definizione  $b^y = x$ ,  $\log_a b^y = \log_a x$ ,  $y \cdot \log_a b = \log_a x$ ,

$$\text{e quindi} \quad y = \log_a x = \frac{\log_b y}{\log_b a}$$

Se in particolare  $x = a$  troviamo la relazione:  $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ .

## 2. Derivata e integrale delle funzioni esponenziali e logaritmo.

Applichiamo alla funzione esponenziale la definizione di derivata:

$$(a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}. \text{ Ponendo } \frac{1}{k} = a^h - 1 \text{ si ricava:}$$

e quindi poiché  $h = \log_a(1/k + 1)$  si ottiene:

$$= a^x \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{\log_a(1/k + 1)} = a^x \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \cdot \log_a(1 + 1/k)} = \frac{a^x}{\log_a e}$$

Questa funzione é sempre positiva se  $a > 1$  e sempre negativa se  $a < 1$ . Perciò, nel primo caso la funzione  $a^x$  é sempre crescente, nel secondo decrescente. Se in particolare  $a = e$  avremo  $(e^x)' = e^x$  poiché  $\log_e e = 1$ . Per calcolare la derivata della funzione  $\log_a x$  si ricorre alla formula per il calcolo della funzione inversa. Infatti, poiché la funzione inversa della  $y = \log_a x$  é la  $x = a^y$  avremo:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \log_a a} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Se poi  $a = e$  e cioè il logaritmo é neperiano  $(\log x)' = 1/x$ .

Da queste formule di derivazione si possono ricavare delle nuove formule di integrazione.

Infatti, poiché  $(a^x)' = a^x \cdot \log a$  si ricava che

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k \text{ ed in particolare se } a=e: \int e^x dx = e^x + k$$

$$\text{Poiché inoltre } (\log x)' = 1/x \text{ sarà } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k.$$

Ora sappiamo che l'integrale di  $1/x$  non é una funzione algebrica, e quindi se non avessimo studiato i logaritmi, non avremmo mai potuto definirlo.

Non ci meraviglia quindi il fatto che l'integrale indefinito di una funzione non sia sempre calcolabile e cioè che esistono funzioni di cui non si può calcolare la primitiva. Così ad esempio la funzione  $f(x) = e^{-x^2}$

### 3. Derivata e integrale delle funzioni trigonometriche.

Cominciamo dalla funzione  $y = \sin x$  per la quale consideriamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin h - \cos h \cdot \sin x}{h} \text{ per la formula di addizione.}$$

$$= \cos x \text{ poiché: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Per la derivata di  $\cos x$  abbiamo già visto che:

$$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Per la derivata della tangente ricorriamo alla regola di derivazione del quoziente:

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\text{Analogamente per la cotangente: } \frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

La funzione inversa di  $y = \sin x$  é la  $y = \arcsin x$  di cui calcoliamo la derivata ricordando che  $x = \sin y$ :

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Analogamente per  $y = \arccos x$  essendo  $x = \cos y$  si ha:

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

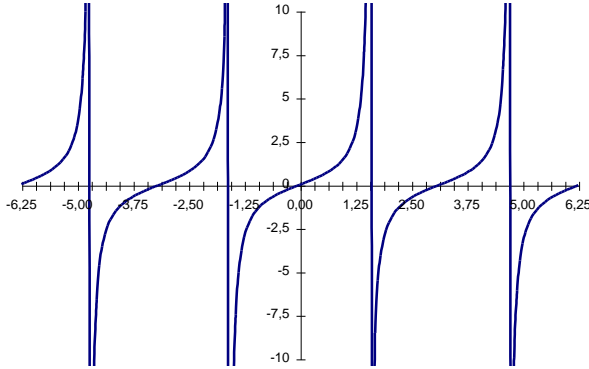
Infine per  $y = \arctg x$ , poiché  $x = \tan y$  si ottiene

$$\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Dalle derivate che abbiamo calcolato possiamo risalire ad alcuni integrali indefiniti:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + c.$$



### 3. La derivata logaritmica.

Ora possiamo calcolare la derivata della funzione  $\varphi(x) = f(x)^{g(x)}$ .

Infatti poiché  $\ln[\varphi(x)] = g(x) \ln[f(x)]$  possiamo derivare i due membri ottenendo:

$$\varphi'(x) = \varphi(x)[g'(x) \ln[f(x)] + g(x) f'(x)/f(x)] = f(x)^{g(x)} [g'(x) \ln[f(x)] + g(x) f'(x)/f(x)].$$

Così ad esempio: la derivata di  $y = x^x$  sarà:  $y' = x^x (\ln x + 1)$ .



## XII TECNICHE ELEMENTARI DI INTEGRAZIONE

### 1. Integrali immediati.

Dalle formule e dalle considerazioni fatte in precedenza sulle derivate, abbiamo ricavato un certo numero di integrali indefiniti che chiameremo *integrali immediati* e che possiamo riassumere nella seguente tabella:

$$\begin{array}{lll} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c & \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c & \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \quad (a > 0 \wedge \neq 1) \\ \int e^u du = e^u + c & \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c & \int \cos u du = \operatorname{sen} u + c \\ \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + c & \int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\cot u + c & \int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + c \\ \int \tan u du = -\ln|\cos u| + c & \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + c & \\ \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c & \int \frac{f'(u)}{f(u)} = \ln|f(u)| + c & \end{array}$$

Se un certo integrale indefinito non risulta sulla lista degli integrali immediati, cercheremo di modificarlo in modo che rientri in una o più delle formule della lista. Se ad esempio, manca una costante moltiplicativa nella funzione integranda, metteremo dove necessario questa costante e scriveremo il suo reciproco fuori dal segno di integrale per compensazione.

Ad esempio:

$$\int \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x d2x = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

Consideriamo un altro esempio. Si voglia calcolare:  $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

Ci ricordiamo che la derivata di  $x^3$  è  $3x^2$  e quindi scrivendo in forma differenziale  $dx^3 = 3x^2 \cdot dx$ . Introducendo un fattore 3 nell'integrale possiamo scrivere:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} x^3 dx^3; \quad \text{se poniamo } u = x^3 \text{ troviamo:}$$

$$\frac{1}{3} \int \operatorname{sen} u du = -\frac{1}{3} \cos u + c = -\frac{1}{3} \cos x^3 + c$$

Se vogliamo calcolare  $\int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ) vediamo che la sostituzione  $u = \sqrt{x}$  ci aiuta.

Infatti si ottiene  $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$  di cui nella funzione integranda abbiamo  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  e manca solo  $\frac{1}{2}$  che possiamo introdurre:  $2 \int \cos u du = 2 \cdot \operatorname{sen} u + c = 2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{x} + c$ .

## 2. Integrazione per sostituzione.

In questi esempi abbiamo usato una *versione integrale* della derivata di una funzione composta. Per vederla meglio siano  $f$  e  $g$  due funzioni differenziabili ed  $F$  la primitiva di  $f$  in modo che  $F' = f$ . Consideriamo la funzione composta  $F(g)$ .

Per la regola di derivazione di una funzione composta

$$\frac{d}{dx} F[g(x)] = F'[g(x)] \cdot g'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x).$$

Ponendo questa espressione in forma integrale otteniamo:  $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = F[g(x)] + c$ .

Se facciamo la sostituzione  $u = g(x)$  avremo  $du = g'(x) \cdot dx$  e perciò

$$\int f(u) \cdot du = F(u) + c.$$

Questo ci dice che possiamo ignorare il fatto che  $u$  è funzione di  $x$  e considerarla come la variabile di integrazione.

Da questo punto di vista quello che facciamo quando calcoliamo un integrale  $I = \int h(x) \cdot dx$  è di cercare una funzione  $f$  e una opportuna sostituzione  $u = g(x)$  tale che  $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

Se ciò è possibile possiamo scrivere  $I = \int f(u) \cdot du$  e se sappiamo trovare una primitiva  $F$  di  $f$  allora  $I = F(u) + c = F[g(x)] + c$ .

Questo è il metodo di *integrazione per sostituzione*.

Applichiamolo ad un esempio:  $\int e^{\sin x} \cos x dx$

Si possono effettuare tre sostituzioni:  $u = \sin x$ ,  $u = e^{\sin x}$  e  $u = \cos x$ ; le prime due portano ad un integrale immediato e quindi sono buone, la terza no.

Esaminiamole una per volta:

I) ponendo  $u = \sin x$  si ha  $du = \cos x \cdot dx$  e quindi:  $\int e^u du = e^u + c = e^{\sin x} + c$

II) se  $u = e^{\sin x}$  si ha  $du = e^{\sin x} \cos x \cdot dx$  e quindi:  $\int du = u + c = e^{\sin x} + c$

III) se infine  $u = \cos x$  si ha  $du = -\sin x \cdot dx$ , ma in questo caso non è facile esprimere  $e^{\sin x}$  in termini di  $u$  e di conseguenza abbandoniamo questa strada.

## 3. Integrazione per parti.

Un metodo di integrazione molto utile lo si ricava dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Siano  $u$  e  $v$  due funzioni di  $x$  entrambe derivabili. Per semplicità sopprimiamo l'argomento  $x$  e scriviamo:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Questo ci dice che  $u \cdot v$  é una primitiva di  $u' \cdot v + u \cdot v'$ , per cui in forma integrale si ha

$$\int (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot dx = u \cdot v + c.$$

Se spezziamo questo integrale nella somma dei due termini e portiamo a destra il primo troviamo:

$$\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int v \cdot u' \cdot dx + c.$$

Questa é detta la **formula di integrazione per parti**, poiché la funzione integranda é separata in due parti (fattori)  $u$  e  $v'$ .

Usando questa formula si può calcolare  $\int u \cdot v' \cdot dx$  se é possibile calcolare  $\int v \cdot u' \cdot dx$ ; quindi la formula sar  utile se il secondo integrale é facile da maneggiare.

La formula di integrazione per parti, si trova spesso scritta in una forma pi  facile da ricordare:  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$  ottenuta ponendo  $v' \cdot dx = dv$  e  $u' \cdot dx = du$ .

Applichiamo questa formula a qualche esempio:

$\int x \cdot \cos x \cdot dx$ ; notiamo che l'integrale é il prodotto di due funzioni  $x$  e  $\cos x$ . Poich  deve essere  $u \cdot v' = x \cdot \cos x$  possiamo procedere in due modi, ponendo  $u = x$  e  $v' = \cos x$  oppure  $u = \cos x$  e  $v' = x$ .

Proviamo il primo:  $u = x$ ,  $v' = \cos x$  e di conseguenza  $u' = 1$  e  $v = \int \cos x \cdot dx = \sin x$ .

Per la formula di integrazione per parti si ottiene:

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

Si pu  verificare questo risultato differenziando la funzione trovata. Se avessimo eseguito la seconda posizione avremmo trovato al secondo membro un integrale pi  complicato di quello di partenza.

Calcoliamo ora  $\int \ln x \cdot dx$ ; poniamo  $u = \ln x$  e  $v' = 1$  per cui

$$u' = 1/x \text{ e } v = x; \text{ quindi: } \int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int \frac{x}{x} \cdot dx = x \cdot \log x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

Calcoliamo  $\int y \cdot e^y \cdot dy$  ponendo  $u = y$ ,  $v' = e^y$  da cui  $u' = 1$  e  $v = e^y$

$$\int y \cdot e^y \cdot dy = y \cdot e^y - \int e^y \cdot dy = e^y \cdot (y - 1) + c.$$

#### 4. Integrazione delle funzioni razionali.

Durante tutto il corso abbiamo posto particolare attenzione allo studio delle funzioni razionali. Molte di queste si possono integrare usando le tecniche gi  viste, come ad esempio  $\frac{1}{(a-x)^2}$ ;  $\frac{1}{a^2+x^2}$  e altre.

Funzioni pi  complicate si trattano con il metodo delle **frazioni parziali**.

Consideriamo anzitutto i casi pi  semplici, e per primo quello in cui il denominatore é un polinomio di primo grado mentre il numeratore é una costante:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx$$

Noi sappiamo che  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$  --  $= \log|u| + c$ , per cui se  $u = ax + b$  e  $du = a \cdot dx$  e di conseguenza con la regola di sostituzione otteniamo:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{a \cdot dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|u| = \frac{1}{a} \log|ax+b| + c.$$

Se il polinomio al denominatore é di secondo grado e il numeratore é costante  $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$  si risolve in tre modi diversi a seconda che il discriminante  $\Delta$  del polinomio di secondo grado sia  $>$ ,  $<$  o  $= 0$ .

Se  $\Delta > 0$  possiamo scomporre la frazione in due piú semplici.

Supponiamo infatti che  $x_1$  e  $x_2$  siano le radici (reali) del denominatore:

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a} \left[ \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right] \quad \text{con A e B da determinare.}$$

Basta ridurre allo stesso denominatore:

$$\frac{A(x-x_2) + B(x-x_1)}{a(x-x_2)(x-x_1)} = \frac{Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1}{a(x-x_2)(x-x_1)} = \frac{(A+B)x - (Ax_2 + Bx_1)}{a(x-x_2)(x-x_1)}$$

e imporre le condizioni che ci riportino alla frazione di partenza:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ax_2 + Bx_1 = -1 \end{cases} \quad \text{da cui si ricava:} \quad A = -\frac{1}{x_2 - x_1}; \quad B = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

Troviamo cosí i valori di A e B che sostituiti nella scomposizione in somma ci riducono la frazione da integrare in due che già conosciamo.

Se  $\Delta = 0$ , il denominatore é il quadrato di un binomio, per cui

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{dx}{(rx + s)^2} \quad \text{ponendo } rx + s = u, \quad du = r \cdot dx \text{ si ha:}$$

$$\frac{1}{r} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{r} \left[ -\frac{1}{u} \right] + c = -\frac{1}{r(rx+s)} + c$$

Se  $< 0$  possiamo spezzare il trinomio nella somma di due quadrati  $(rx + s)^2 + t^2$  e quindi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{(rx + s)^2 + t^2} dx$$

ponendo  $u = rx + s$  e  $du = r \cdot dx$  si ha

$$\frac{1}{r} \int \frac{1}{u^2 + t^2} dx = \frac{1}{rt} \operatorname{arctg} \frac{u}{t} + c = \frac{1}{rt} \operatorname{arctg} \frac{rx+s}{t} + c$$

Nel caso in cui il denominatore sia un polinomio di secondo grado e il numeratore di primo, avremo:

$\int \frac{rx + s}{ax^2 + bx + c} dx$  dove possiamo pensare che  $r = 2a$ , altrimenti si moltiplica il numeratore per  $2a/r$ ; se poi  $s = b$  (oppure  $b \frac{2a}{r}$ ) il numeratore é la derivata del denominatore, per cui:

$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx$  se poniamo  $u = ax^2 + bx + c$  e  $du = (2ax + b) \cdot dx$  diventa:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

Se invece  $s \neq b$  possiamo aggiungere e togliere  $b$  al numeratore scomponendo l'integrale in due:

$$\int \frac{2ax + b - b + s}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \int \frac{s - b}{ax^2 + bx + c} dx$$

dei quali sappiamo già calcolare le primitive rientrando nei casi già esaminati.

Consideriamo ora il problema generale della integrazione di una funzione razionale  $R(x) = P(x)/Q(x)$  dove  $P$  e  $Q$  sono due polinomi a coefficiente reali. Supponiamo inoltre che  $R(x)$  non sia un polinomio, che sia ridotta ai minimi termini e che il grado di  $P$  sia inferiore di quello di  $Q$ .

Ogni polinomio non costante, con coefficienti reali ha una fattorizzazione unica e i fattori sono lineari o quadratici (sempre reali).

In pratica trovare questa scomposizione in fattori può essere molto difficile, ma questo é un problema che supponiamo di aver risolto.

a) Sia  $x - r$  un fattore lineare di  $Q(x)$  e sia  $(x - r)^m$  la più alta potenza di  $x - r$  che divide  $Q(x)$ .

In corrispondenza di questo fattore assegniamo la somma di frazioni:

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - r)^m} \quad \text{dove } A_1, A_2, \dots, A_m \text{ sono costanti incognite che possono essere tutte nulle tranne } A_m.$$

b) Sia  $ax^2 + bx + c$  un fattore di  $Q(x)$  tale che  $b^2 - 4ac < 0$  oppure per il quale non é conveniente trovare i fattori lineari.

Sia  $n$  la più alta potenza di questo fattore che divide  $Q(x)$ .

In corrispondenza ad esso assegniamo la somma di  $n$  frazioni:

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

dove abbiamo  $2n$  costanti incognite che possono essere tutte nulle tranne  $B_n$  oppure  $C_n$ .

Possiamo applicare questo procedimento a ciascuno dei fattori lineari o quadratici di  $Q(x)$  e porre  $R(x)$  uguale alla somma di tutte le frazioni parziali ottenute e delle quali sappiamo calcolare l'integrale.

Il numero totale di costanti incognite é sempre uguale al grado di  $Q(x)$  e quindi abbiamo la quantità di informazioni sufficiente per determinare le costanti incognite poiché possiamo stabilire un numero di equazioni pari al numero delle incognite.

Non dimostreremo questo fatto, ma in ogni caso la decomposizione può essere verificata sommando le frazioni parziali ottenute.

Come esempio ci proponiamo di integrare la funzione  $R(x) = \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}$

Secondo quanto detto possiamo scrivere:

$$R(x) = \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

Riducendo allo stesso denominatore si ha:

$$4 - 2x = (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2 + (A - 2B + C)x + (B - C + D)$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B - C + D = 0 \\ A - 2B + C = -2 \\ B - C + D = 4 \end{cases} \quad \text{che risolto da:} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = -2 \\ D = 1 \end{cases}$$

per cui: 
$$R(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

e quindi: 
$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx = \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx .$$

### XIII FUNZIONI DI DUE VARIABILI

#### 1.- Dominio e rappresentazione.

Esistono problemi nei quali una qualche quantità dipende da due o più parametri variabili. Così ad esempio in chimica:

$$pV = nRT \text{ da cui } p = \frac{nRT}{V} \text{ é una relazione del tipo } z = k \cdot \frac{x}{y}.$$

La pressione di un gas dipende sia dalla temperatura che dal volume nel quale é racchiuso (costanti che siano  $n$  ed  $R$ ).

In questo caso si dice che  $p$  é funzione delle due variabili  $T$  e  $V$  ed in generale si scrive:

$$z = f(x,y)$$

dove  $f$  é detta *funzione multivariata* o funzione di più variabili.

I numeri  $x$  ed  $y$  sono detti *variabili indipendenti* e  $z$  la variabile dipendente. Il dominio  $D$  della funzione  $f$  é un insieme di coppie  $(x,y)$  che danno a  $z$  valori reali:

$$D = \{(x,y)/x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Il codominio della funzione sarà l'insieme  $C$  di tutti i valori  $z$  reali:  $C = \{z/ z \in \mathbb{R}\}$ .

Il grafico di una funzione di due variabili si può rappresentare in un sistema ortogonale unitario di coordinate cartesiane tridimensionale mediante una superficie dello spazio.

Tracciare in prospettiva una superficie dello spazio riveste sempre dei problemi. Si ricorre quindi alla rappresentazione delle intersezioni della superficie con i piani coordinati (tracce) e con dei piani paralleli al piano  $xy$  ( $z = \text{cost.}$ ) ottenendo così sul piano  $xy$  un sistema di isolinee o *linee di livello*.

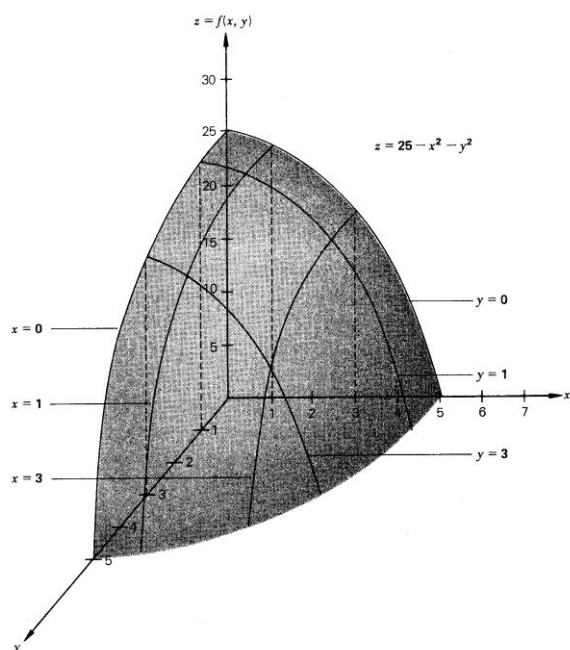


Fig. 1.13.- Tracce di una superficie sui piani coordinati.

#### 2. Limiti e continuità.

Si definisce facilmente il concetto di *intorno circolare* di raggio  $r$  di  $P(x_0, y_0)$  del dominio  $D$  come l'insieme dei punti  $(x, y)$  che hanno da  $P$  distanza inferiore ad  $r$ :

$$I_r(P_0) = \{(x, y) / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

Di conseguenza si estendono in maniera ovvia le definizioni di limite e di continuità di una funzione. Sia  $P_0$  un punto del dominio della  $f(P)$  o un punto di accumulazione per esso.

Def. 2.1. Si dice che  $f(P)$  tende a  $L$  per  $P$  tendente a  $P_0$  se comunque preso un intorno  $I_r(L)$  si può determinare un intorno circolare di raggio  $s$  di  $P_0$  tale che per tutti i punti di  $I_s(P_0)$  si abbia che  $f(P) \in I_r(L)$ .

Quando questo accade si scrive:  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$

Def. 2.2. Si dice che la funzione  $f$  è continua in  $P_0$  se  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ .

### 3. Derivate parziali.

Poichè la funzione  $f(x, y)$  dipende da due variabili, si può calcolare la derivata della funzione  $f$  rispetto a ciascuna di esse. Queste due derivate vengono dette *derivate parziali* rispetto alle variabili  $x$  ed  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = f_y$$

Se questi limiti esistono e le funzioni  $f_x$  ed  $f_y$  sono *continue* nel punto  $P_0$  si dice che la funzione  $f(x, y)$  è derivabile nel punto  $P_0$ .

Il calcolo formale delle derivate parziali è molto semplice, ricalcando quello delle derivate ordinarie e tenendo solo presente che l'altra variabile va considerata come una costante.

Il significato della derivata rimane quindi quello di pendenza di una retta ma questa volta  $f_x$  e  $f_y$  rappresentano la pendenza di due rette in piani paralleli ai piani  $xz$  ed  $yz$  rispettivamente. Le rette tangenti individuano un piano che è tangente alla superficie rappresentata dalla funzione  $f(x, y)$  nel punto  $P_0$ .

Quando si calcolano le derivate seconde, si possono avere due situazioni diverse: o si deriva la derivata prima rispetto alla stessa variabile, o si deriva rispetto all'altra variabile. Nel primo caso si avranno le *derivate parziali seconde*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

nel secondo si avranno le derivate seconde miste:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$



Si può dimostrare che se le derivate seconde miste sono continue esse sono uguali (teorema di Schwartz).

Le derivate parziali prime di una funzione in un punto  $P_0$  permettono di scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie in  $P_0$ :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se una funzione  $z = f(x, y)$  è derivabile  $n$  volte in un intorno di  $P_0$  si può scrivere il suo sviluppo in serie di Taylor (fermandosi al secondo termine):

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}[f_{xx}(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(y - y_0)^2] + R_2$$

Lo scarto della superficie dal suo piano tangente è quindi dato, in prima approssimazione da:

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{2}[f_{xx} \cdot (x - x_0)^2 + 2f_{xy} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + f_{yy} \cdot (y - y_0)^2]$$

Equazione di secondo grado il cui grafico è dato da una superficie detta Quadrica.

Se  $\Delta(x, y)$  è positiva in un punto  $P_0$  essa sta tutta sopra il piano tangente in un intorno del punto; se è negativa sta sotto; se è uguale a 0, non si può dire niente e bisogna ricorrere ai termini di ordine superiore.

#### 4. Massimi e minimi.

Si possono facilmente estendere dal caso unidimensionale i concetti di massimo e di minimo relativo e assoluto.

Def. 4.1. Si dice che una funzione  $f(x, y)$  ha un massimo relativo nel punto  $P_0(x_0, y_0)$ , se esiste un intorno circolare  $I_r(P_0)$ , per tutti i punti del quale  $P \neq P_0$  si ha che  $f(P) < f(P_0)$ . Se invece  $f(P) > f(P_0)$  il punto si dirà di minimo.

Condizione necessaria, (ma non sufficiente) perché un punto sia di massimo o di minimo relativo è che le derivate prime rispetto alla  $x$  ed alla  $y$  siano entrambe uguali a 0.

Per determinare i punti di massimo e di minimo bisogna individuare i punti in cui si annullano le derivate prime (punti stazionari):

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

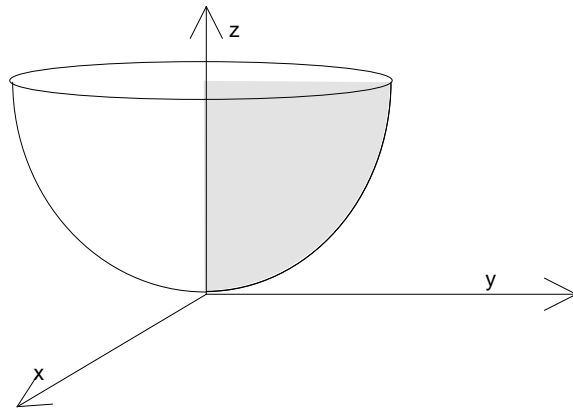
E' necessario poi considerare lo scarto della superficie con il suo piano tangente,  $\Delta(x, y)$ , che in prima approssimazione è dato da una *forma quadratica*. Per lo studio dei punti stazionari e delle forme quadratiche si ricorre perciò ad una quantità nuova, detta determinante Hessiano e definita in base alle derivate seconde:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

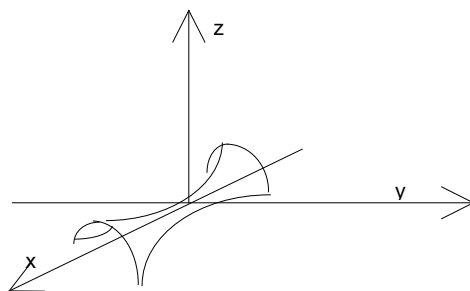
la quale ci permette di discriminare sulla natura del punto in esame a seconda del segno che assume  $H(x,y)$  nel punto  $P$ .

Perciò se in un punto  $P_0(x_0,y_0)$  si annullano le derivate prime si possono avere tre situazioni:  $H(x_0,y_0) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$ .

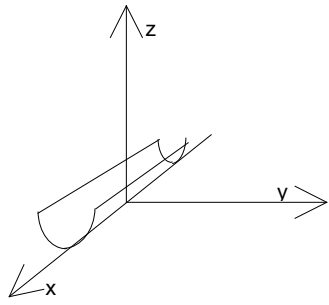
a) Se  $H > 0$  la forma quadratica si dice *definita*, il punto si dice *ellittico* e la concavità della curva sarà diretta verso l'alto se  $\Delta(x,y)$  è positivo, verso il basso se è negativo. In questo caso si avrà un punto di *minimo* o di *massimo*. La superficie, in un intorno del punto  $P_0$  avrà l'andamento di un ellissoide parabolico con la concavità rivolta verso l'alto (minimo) se  $f_{xx}$  ed  $f_{yy}$  sono entrambe positive e verso il basso (massimo) se sono entrambe negative.



b) Se  $H < 0$  la forma quadratica si dice *indefinita* di segno. Essa attraversa il piano tangente in  $P_0$  che si dice *punto iperbolico*. In  $P_0$  si avrà un punto di *sella*.



c) Se  $H = 0$  il punto viene detto *parabolico*, la forma quadratica si dice *semidefinita*. In un punto parabolico può accadere una qualunque delle situazioni precedenti. Non si può dire nulla e bisogna ricorrere ad altri metodi di analisi.



## XIV EQUAZIONI DIFFERENZIALI

### 1. Struttura generale di una E.D.

Se ad un paziente vengono somministrati 100 mg. di un farmaco, la quantità di sostanza presente nel sangue diminuisce nel tempo con una legge che si vuole determinare.

Sia  $Q$  la quantità iniziale e  $Q(t)$  la quantità presente al tempo  $t$ , dopo un intervallo  $\Delta t$  si avrà un decremento dovuto a  $t$ , a  $Q(t)$  e ad altri fattori indipendenti dal tempo e rappresentabili mediante un coefficiente  $a$  per cui:  $Q(t + \Delta t) = Q(t) - a \cdot Q(t) \cdot \Delta t$

$$\frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = a \cdot Q(t) \quad \text{e al limite per } \Delta t \rightarrow 0 \text{ si ottiene: } Q'(t) = a \cdot Q(t)$$

Ci si trova perciò di fronte ad una uguaglianza del tipo  $y' = a \cdot y$  che viene detta *equazione differenziale* del primo ordine e dalla quale si vuole determinare l'espressione della funzione  $y = \varphi(x)$  che la soddisfa identicamente e che viene detta *soluzione* o *integrale* della equazione differenziale.

Sia  $y = s(t)$  lo spazio percorso da un mobile al tempo  $t$  e  $g$  l'accelerazione a cui esso è sottoposto. Per definizione di accelerazione si avrà:  $s''(t) = g$  dalla quale si vuole determinare la legge del moto  $s(t)$ . Questa è una equazione differenziale del secondo ordine.

Una qualsiasi funzione che stabilisce un legame tra le variabili e le derivate di una funzione prende il nome di *equazione differenziale* (E.D.)

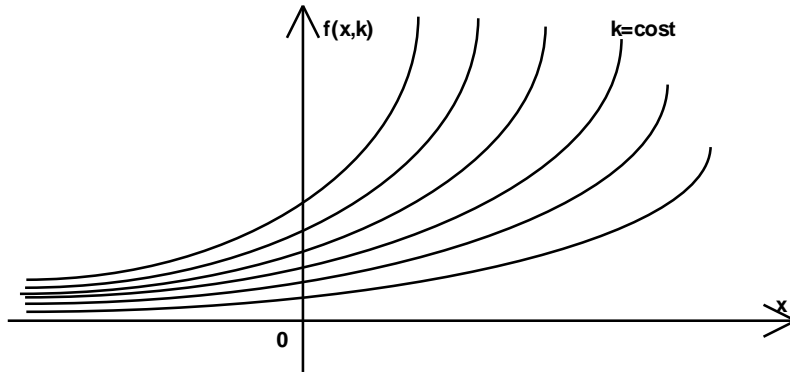
Le equazioni differenziali si distinguono in *ordinarie* e a *derivate parziali*, e a seconda dell'*ordine* massimo delle derivate in esse presenti si possono distinguere equazioni differenziali del primo, secondo .... n-esimo ordine. Quelle del primo ordine avranno la forma generica  $f(x,y,y')=0$  detta forma implicita mentre se è possibile esplicitare rispetto alla  $y'$  si può portare l'E.D. nella sua forma normale:  $y' = f(x,y)$ .

La soluzione di una E.D. del primo ordine sarà la funzione  $y = \varphi(x)$  tale che

$$f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$$

Ogni soluzione di una E.D., se esiste sarà definita a meno di una costante e prende il nome di *integrale generale* o soluzione dell'equazione differenziale.

Al variare di una costante di integrazione l'integrale generale di una equazione differenziale rappresenta una famiglia di curve ciascuna delle quali è detta *integrale* o *soluzione particolare*.



Per individuare tra le infinite soluzioni quella del problema in esame, bisogna possedere ulteriori informazioni ed imporre una condizione mediante i valori iniziali della  $\varphi$  o della sua derivata in modo da determinare in modo univoco la costante arbitraria di integrazione.

## 2. Integrazione di una equazione differenziale del primo ordine.

Anche le equazioni differenziali del primo ordine si distinguono in un gran numero di tipi, che si differenziano a seconda della loro struttura e che si risolvono ciascuna con un metodo diverso. I più comuni sono:

Equazioni a *variabili separabili*:  $y' = A(x) \cdot B(y)$

Equazioni *lineari*:  $y' + a(x)y = f(x)$

Equazioni di *Bernoulli*:  $y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$

Il tipo più comune nelle applicazioni biologiche e di soluzione più facile è costituito dalle equazioni differenziali a variabili separabili. Questo sono quelle nelle quali è possibile separare le due variabili sui due membri della eguaglianza.

Gli esempi più comuni sono:

$$a) y' = a \cdot y \quad b) y' = a \cdot y + b \quad c) y' = a \cdot y^2 + b \cdot y + c \quad d) y' = k \cdot y/x$$

a) Si consideri la equazione differenziale  $\frac{dy}{dx} = a \cdot y$ . Per la definizione di differenziale si può scrivere formalmente:  $dy = a \cdot y \cdot dx$ . Dividendo per  $y$  ed integrando ambedue i membri si ottiene:  $\frac{dy}{y} = a \cdot dx$ ;  $\log y = ax + c$

dove c'è una costante arbitraria. Per cui  $y = e^{ax+c}$  e ponendo  $e^c = k$  si ottiene  $y = k e^{ax}$  che è una funzione esponenziale con dato coefficiente  $a$  e costante arbitraria  $k$ . Assegnato  $a$  si ottiene al variare di  $k$  una famiglia di curve.

b) Si consideri la equazione  $y' = ay + b$

$$y' = a y + b \quad \frac{dy}{dx} = a(y + p)$$

$$\frac{dy}{y+p} = a dx; \text{ da cui, integrando : } \log(y + p) = ax + c; \text{ e } y = k e^{at-p}.$$

c) Si consideri l'equazione  $y' = a y^2 + b y + c$ .

Da questa si ricava:  $\frac{dy}{ay^2 + by + c} = dx$ . Supponendo che il discriminante del denominatore sia  $> 0$  e che  $y_1$  e  $y_2$  siano le sue radici, si possono integrare i due

membri ottenendo:  $\ln \left| \frac{y - y_2}{y - y_1} \right| = a(y_2 - y_1) x + C$  da cui infine si ha  $y = y_1 +$

$$\frac{y_2 - y_1}{1 + k \cdot e^{a(y_2 - y_1)x}} \text{ dove } k = -e^C$$

Moltissime sono le applicazioni di queste equazioni nel campo della analisi dei sistemi biologici, econometrici, fisici e chimici: lo sviluppo di una popolazione sotto varie ipotesi, il raffreddamento di un corpo, il diffondersi di una malattia contagiosa, il test di un farmaco antitumorale ecc.ecc..

### 3. Il problema dei valori iniziali di Cauchy.

L'integrale generale di una equazione differenziale del primo ordine è determinato a meno di una costante arbitraria di integrazione al variare della quale si ottengono infinite soluzioni particolari corrispondenti a una famiglia di curve del piano.

Se tra le infinite curve si vuole individuarne una particolare bisogna determinare la costante di integrazione in modo da soddisfare una data condizione.

Questo problema viene detto **problema dei valori iniziali o problema di Cauchy** e consiste nella soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e permette di determinare la curva che passa per il punto  $y_0$ .

### 4. Equazioni lineari.

Si distinguono di solito tre casi:

a) Equazioni lineari del primo ordine. Esse hanno la forma:

$$\begin{aligned} y' + a(x) y &= f(x) && \text{e la} \\ y' + a(x) y &= 0 && \text{prende il nome di omogenea} \end{aligned}$$

associata.

L'integrale generale della equazione lineare completa è dato dalla somma dell'integrale generale della omogenea associata più un integrale particolare della equazione completa.

L'integrale generale della omogenea si trova facilmente con il metodo delle variabili separabili se  $a(x)$  è integrabile:

$$\frac{dy}{y} = -a(x) dx \quad \log |y| = \int a(x) dx + c \quad y_1(x) = e^{\int a(x) dx + c} = c_1 e^{\int a(x) dx}$$

Un integrale particolare della completa si trova ponendo:

$$g(x) = h(x) y_1(x) \quad \text{e sostituendo} \quad h'(x) y_1(x) + h(x) y_1'(x) + h(x) y_1(x) a(x) = f(x)$$

$$\text{raccolgendo a fattor comune: } h'(x) y_1(x) + h(x) [y_1'(x) + y_1(x) a(x)] = f(x)$$

$$\text{poiché } y_1'(x) + y_1(x) a(x) = 0 \quad \text{rimane} \quad h'(x) y_1(x) = f(x)$$

da cui si ricava

$$h'(x) = f(x) / y_1(x) \quad \text{e quindi} \quad h(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx.$$

La funzione cercata quindi sarà  $g(x) = y_1(x) \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx$  e quindi l'integrale

$$\text{generale della equazione completa è:} \quad y(x) = y_1(x) + g(x).$$

b) Equazioni lineari di ordine qualunque:

Quanto detto per le equazioni del primo ordine vale anche per quelle di ordine qualunque:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$$

e le loro omogenee associate:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

In generale la loro risoluzione è un problema piuttosto complesso. Nelle applicazioni, molto spesso i coefficienti  $a_k$  sono costanti.

c) Equazioni lineari a coefficienti costanti:

$$y'' + b y' + c y = f(x)$$

L'integrale generale della equazione completa è la somma dell'integrale generale della omogenea associata con un integrale particolare della equazione completa.

Le soluzioni della omogenea associata  $y'' + b y' + c y = 0$  si trovano

$$\text{risolvendo la } \textit{equazione algebrica caratteristica} \quad \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

Se  $\Delta > 0$  e  $\lambda_1, \lambda_2$  sono le radici della equazione caratteristica, allora le funzioni  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  e  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  formano un *sistema fondamentale*.

Se  $\Delta = 0$  allora  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  per cui  $y_1 = e^{\lambda x}$  e  $y_2 = x e^{\lambda x}$

Se  $\Delta < 0$  allora  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complesse coniugate per cui  $\lambda_1 = \beta + i\gamma$  e  $\lambda_2 = \beta - i\gamma$

Di conseguenza

$$y_1(x) = e^{(\beta+i\gamma)x} = e^{\beta x} (\cos \gamma x + i \sin \gamma x) \quad y_2(x) = e^{(\beta-i\gamma)x} = e^{\beta x} (\cos \gamma x - i \sin \gamma x)$$

da cui si vede che anche le  $y_1(x) = (y_1 + y_2)/2 = \cos \gamma x$  e  $y_2(x) = (y_1 - y_2)/2i = \sin \gamma x$

In generale  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + g(x)$  dove  $g(x)$  è un integrale particolare della equazione completa che deve essere determinato separatamente.

Così si risolvono alcune importanti equazioni differenziali della Fisica:

Moto armonico semplice:  $m\ddot{x} + kx = 0$ ;

Moto armonico smorzato:  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ ;

Oscillazione forzate:  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos \omega t$ .



## APPENDICE I. CORRELAZIONE E REGRESSIONE

### 1. Relazioni tra variabili aleatorie.

Sappiamo tutti come ci sia un legame molto stretto tra la lunghezza del raggio e quella della circonferenza di un cerchio, tanto che, nota l'una, possiamo facilmente calcolare l'altra. E' analogamente intuitiva la esistenza di un legame tra altezza e peso di un individuo, anche se questa non può esprimersi con funzione matematica esatta. Noi pensiamo che all'aumentare della statura aumenta anche il peso e, anche se sappiamo che non è sempre così possiamo affermare che *in media* questo succede.

Se infine pensiamo al lancio contemporaneo di due dadi e ci domandiamo se c'è una relazione tra i punti che escono sul primo e quelli che escono sul secondo dado, la risposta è che se i due dadi non sono truccati, la relazione non c'è.

Se si rappresentano le coppie di valori come punti di un piano cartesiano si nota che nel primo caso essi stanno tutti su di una retta, nel secondo, i punti sono sparsi nel piano, ma sono più addensati attorno ad una retta. Nel terzo caso invece sono sparsi nel piano in modo omogeneo.

Nei primi due casi si può quindi ipotizzare un legame di tipo funzionale tra le due variabili. Nel primo caso esso è certo, nel secondo esso è probabile e può venir determinato con metodi statistici.

### 2. Regressione.

Due variabili aleatorie si dicono funzionalmente dipendenti se sono legate da una relazione di tipo  $y = \varphi(x)$ . Questa dipendenza o *regressione* è determinata dal valore dei parametri che caratterizzano la funzione  $\varphi$ , nonché ovviamente dalla struttura della  $\varphi(x)$  stessa.

Il caso più semplice e più comunemente considerato è quello in cui la funzione  $\varphi$  è lineare,  $y = ax + b$ , nel qual caso anche la dipendenza o *regressione di y rispetto ad x* viene detta lineare. Tale dipendenza sarà determinata dalla conoscenza dei parametri  $a$  e  $b$  i quali vengono determinati mediante il metodo dei minimi quadrati.

### 3. Il metodo dei minimi quadrati.

Volendo determinare se c'è una correlazione tra età e pressione arteriosa è stato preso in considerazione un gruppo di 12 donne:

Età (X)	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
Press.s.(Y)	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

Si vuole determinare se tra queste due variabili aleatorie esiste un legame (correlazione) e se si può determinare la funzione (regressione) che lo esprime. Considerando la variabile X come una variabile deterministica, cioè considerando i valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  come assegnati possiamo pensare i valori  $y_1, y_2, \dots, y_n$  come le determinazioni di tante variabili aleatorie  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  aventi speranza matematica  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_n$  e varianza  $\sigma^2$ .

La funzione

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1, n} \sigma_i} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \bar{Y}_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

rappresenta la probabilità di presentarsi che ha un dato campione  $y_1, y_2, \dots, y_n$  e il suo logaritmo

$$\text{Log}(L) = \log \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1, n} \sigma_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \bar{Y}_i)^2}{\sigma_i^2}$$

viene detta *funzione di verosimiglianza* e sarà massima quando sarà minima la quantità

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_n, a, b) = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \bar{Y}_i)^2}{\sigma_i^2}$$

dove  $\bar{Y}_i = a X_i + b$  e  $Y_i = \bar{Y}_i + \delta_i$  e  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$  (ipotesi di importanza fondamentale che afferma come al variare di X la varianza di Y rimane costante)

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_n, a, b) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{[Y_i - (aX_i + b)]^2}{\sigma^2}$$

I valori di a e b si trovano annullando il sistema:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -2[\sum x_i \cdot y_i - a \cdot \sum x_i^2 - b \cdot \sum x_i] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -2[\sum y_i - a \cdot \sum x_i - b \cdot n] = 0$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i = \sum x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum x_i + n \cdot b = \sum y_i \end{cases}$$

Come si vede si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite risolubile con i metodi dell'algebra lineare.

Da esso si ricavano:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

che sono i *coefficienti di massima verosimiglianza*.

N.B. Il metodo dei minimi quadrati può essere applicato nei più svariati campi della scienza, ma mantiene il proprio significato solo se viene verificata la ipotesi fondamentale per la quale la varianza della  $y$  rimane costante su tutto il campo di definizione della  $x$ .

#### 4. La covarianza.

Il coefficiente della variabile  $X$ , e cioè il coefficiente angolare della retta di regressione, viene detto *coefficiente di regressione* della variabile  $Y$  rispetto alla variabile  $X$ . Esso misura il grado di dipendenza tra le due variabili. Il parametro  $b$  è invece di secondaria importanza, per cui molte volte può essere utile eliminarlo dai calcoli. Questo viene fatto cambiando l'origine dei sistemi di riferimento delle variabili  $X$  ed  $Y$  e precisamente prendendo come origine degli assi cartesiani i valori medi  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  delle variabili stesse. In questo modo, al posto della successione di coppie di valori  $(X_i, Y_i)$  si prende in considerazione la successione di coppie di scarti  $(x_i, y_i)$  fornite dalle relazioni

$$X_i - \bar{X} = x_i \quad Y_i - \bar{Y} = y_i$$

Cosicché nelle equazioni normali le sommatorie si annullano per la proprietà degli scarti dalla media aritmetica. Pertanto dalla prima equazione si ricava  $b = 0$  e dalla seconda:

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Questa espressione del coefficiente di regressione è di fondamentale importanza in tutta la teoria. È bene però tenere presente che la forma in questione si ha quando le variabili  $x$  e  $y$  sono gli scarti dei valori originari dalle rispettive medie aritmetiche.

Approfitando di tale circostanza, all'espressione del coefficiente di regressione si può dare una forma ancora più espressiva dividendo numeratore e denominatore per  $n$  (il numero delle coppie di valori  $(x, y)$ ). Si ottiene così:

$$a = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n}}{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

dove il denominatore non è altro che la varianza della variabile indipendente. Il numeratore, per analogia possiamo indicarlo con  $\sigma_{x,y}^2$ . Esso è la media dei prodotti degli scarti delle due variabili dalle rispettive medie. Per questa sua caratteristica l'espressione viene detta *covarianza* ossia varianza congiunta delle due variabili. Pertanto l'equazione del coefficiente di regressione si può scrivere

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.$$

Questa relazione si può esprimere dicendo che il coefficiente di regressione (lineare) di una variabile Y rispetto ad X è uguale al rapporto tra la covarianza delle due variabili e la varianza della variabile indipendente X. E' sotto questa forma che il coefficiente di regressione gioca un ruolo importantissimo anche nella teoria della correlazione.

Infatti, in modo del tutto analogo a quello fin qui seguito, si può considerare la regressione della variabile X rispetto alla Y:  $X = \psi(Y)$ . Nell'ipotesi di una dipendenza lineare la relazione sarà:  $X = a'Y + b'$ . Ripetendo il ragionamento precedente e considerando ancora gli scarti dalle medie si trova:

$$a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

Si osserva che i numeratori dei due coefficienti di regressione  $a$  e  $a'$  sono uguali. Questo si spiega notando che la covarianza è una quantità in cui le variabili entrano in modo simmetrico.

## 5. Correlazione.

La correlazione è un aspetto più generale della regressione in quanto considera la relazione intercedente tra due variabili senza porre la condizione di una dipendenza di natura causale tra le variabili stesse. Essa viene considerata l'interdipendenza delle due variabili, senza specificare quale delle due variabili dipenda dall'altra.

Su questa interpretazione si basa il calcolo di una importantissima grandezza statistica, il *coefficiente di correlazione*  $r$ .

Alla sua definizione si perviene immediatamente partendo dai coefficienti di regressione lineare:

$$r = \sqrt{a \cdot a'} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Questa relazione può enunciarsi dicendo che il coefficiente di correlazione tra due variabili è uguale al rapporto tra la covarianza delle due variabili e il prodotto dei rispettivi scarti quadratici medi.

Alcune proprietà del coefficiente di correlazione si vedono direttamente dalla sua espressione. Esso è un numero che ha lo stesso segno della covarianza poiché il denominatore è costituito da grandezze che vengono prese con segno positivo ed inoltre si dimostra che il suo valore è compreso nell'intervallo  $-1$  e  $+1$  estremi inclusi.

Il valore  $-1$  si riferisce al caso in cui gli scarti corrispondenti delle due variabili sono tutti uguali e di segno contrario. Il valore  $+1$  quando sono tutti uguali e dello stesso segno. In questi casi si dice che la correlazione è massima e sarà positiva o negativa a seconda che  $r$  sia uguale a  $\pm 1$ . Se  $r$  invece è uguale a  $0$ , si dice che la correlazione è nulla.

## 5. Il test di Student.

Valori di  $r$  prossimi a 0 suggeriscono indipendenza tra  $X$  e  $Y$ , ma poichè il coefficiente di correlazione può variare per effetto del campionamento (e cioè per la legge del caso) bisogna controllare la sua significatività. Essa dipende sia dal valore di  $r$  che dal numero di coppie di valori osservati  $n$ : maggiore è  $n$ , minore deve essere  $r$  per un certo livello di significatività. Un metodo conveniente per verificare la significatività di un coefficiente è il seguente: la variabile aleatoria

$$t_r = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

segue la distribuzione  $t$  di Student con  $n-2$  gradi di libertà. Nell'esempio del par. 4. si trova che  $r = 0.871$  ed  $n = 12$ , per cui  $t_r = 5.606$

Guardando la tabella della  $t$  di Student si nota che per 10 gradi di libertà, la probabilità che  $t \geq 3.169$  è 0.01; poichè il valore di  $t$  trovato è molto più grande, la probabilità di ottenere per caso un coefficiente così grande è ancora più piccola. Perciò si può affermare che c'è una relazione positiva tra età e pressione arteriosa ad un livello di confidenza del 95%.

## APPENDICE II. MATRICI E DETERMINANTI

Una tabella di numeri, reali o complessi, formata da  $m$  righe ed  $n$  colonne viene detta *matrice*  $m \times n$  ed ha la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & & & \dots \\ \dots & \dots & & & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & & a_{m,n} \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = B$$

dove  $a_{i,k}$  è il  $k$ -esimo elemento della  $i$ -esima riga.

Se  $n=1$  la tabella si riduce ad una sola colonna e prende il nome di *vettore colonna*.

Se  $m=1$  si ha un *vettore riga*.

Di solito le matrici si indicano con lettere maiuscole mentre i loro elementi con lettere minuscole munite di indice.

Se  $m=n$  la matrice si dice *quadrata*. Se gli  $a_{i,k} = 0$  per  $i \neq k$  la matrice si dice *diagonale*. Se inoltre gli  $a_{i,i} = 1$  la matrice si dice *unità* e viene indicata con  $I$

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \quad \text{simbolo di Kronecker.}$$

La **somma** e la **differenza** di due matrici  $A$  e  $B$  si possono calcolare solamente hanno le stesse dimensioni e si ha  $c_{i,k} = a_{i,k} \pm b_{i,k}$ .

Il **prodotto** tra due matrici si può eseguire in diversi modi. Il più frequente è quello *righe per colonne*. Se  $A$  è una matrice quadrata ( $n \times n$ ) ed  $X$  un vettore colonna

$$b_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k$$

nel qual caso il numero delle colonne del primo vettore è uguale a quello delle righe del secondo. Il prodotto allora è un vettore colonna. Perciò un sistema lineare si può scrivere:

$$A X = B.$$

Scambiando tra di loro le righe con le colonne di una matrice ( $m \times n$ ) si ottiene una nuova matrice  $A^t$ , con  $m$  colonne ed  $n$  righe, detta *trasposta* di  $A$  e tale che  $a_{i,k}^t = a_{k,i}$ .

Se  $A$  è una matrice quadrata, si può trovare una matrice  $A^{-1}$  tale che  $A A^{-1} = I$ .

Questa viene detta la matrice *inversa* di  $A$ .

Si dice *prodotto associato* di una matrice il prodotto di  $n$  elementi comunque presi purchè a due a due non appartenenti alla stessa riga o alla stessa colonna.

**Determinante** di una matrice quadrata è la somma degli  $n!$  prodotti associati ciascuno preso con il proprio segno o con il segno cambiato a seconda che la permutazione degli indici sia di classe pari o dispari.

Una *permutazione* si dice di classe pari o dispari se tale è il numero delle inversioni che essa forma con quella fondamentale.

Si possono dimostrare facilmente le seguenti proprietà:

- 1) Una matrice quadrata e la sua trasposta hanno determinanti uguali.
- 2) Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli il determinante è nullo.
- 3) Se si scambiano tra loro due righe o due colonne il determinante cambia segno.
- 4) Se in una matrice si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per uno stesso numero  $k$  il determinante viene moltiplicato per  $k$ .
- 5) Se in una matrice due righe sono uguali o proporzionali, oppure se una riga è combinazione lineare di altre due, il determinante è uguale a 0.

### APPENDICE III. NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA.

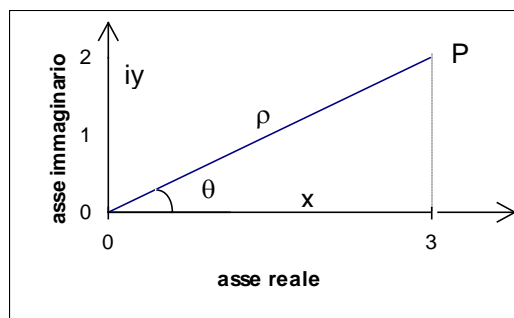
Un *numero complesso*  $\alpha$  viene definito da una coppia di numeri reali  $x$  e  $y$  detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso:

$$\alpha = x + i y$$

Il numero complesso si può quindi rappresentare come un punto P di un piano (*piano complesso*) avente in ascissa la sua parte reale ed in ordinata quella immaginaria.

Il numero complesso  $\bar{\alpha} = x - i y$  è detto il *complesso coniugato* di  $\alpha$  e ponendo

$x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ , si ottiene  $\alpha \bar{\alpha} = x^2 + y^2 = \rho^2$ . La quantità  $\rho = |\alpha|$



viene detta il *modulo* del numero complesso e l'angolo  $\theta = \text{atan} \frac{y}{x}$  il suo *argomento*.

Dati due numeri complessi:  $\alpha = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $\beta = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

si può definire il loro prodotto  $\alpha \beta = \rho \rho_1 [\cos (\theta + \theta_1) + i \sin (\theta + \theta_1)]$

da dove si può calcolare il quadrato  $\alpha^2 = \rho^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

e la potenza n-esima  $\alpha^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$  (formula di De Moivre)

e quindi anche la radice n-esima. Infatti se

$\zeta^n = z$  allora  $\zeta$  è la radice di  $z$ .

Per cui se:  $z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$   $\zeta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

$\zeta^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$  e quindi:

$r^n = \rho$   $r = \rho^{1/n}$  e inoltre:  $n \theta = \phi + 2 h \pi$   $\theta = \frac{\phi + 2h\pi}{n}$

$\zeta_h = \rho^{1/n} [\cos \frac{\phi + 2h\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2h\pi}{n}]$  per  $h = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Perciò, ogni numero complesso  $z \neq 0$  ha  $n$  e soltanto  $n$  radici n-esime algebriche distinte che si ottengono ponendo  $h = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .



Così, ad esempio, si possono calcolare le radici quarte dell'unità che risultano:  
 $\sqrt[4]{1} = 1, i, -1, -i.$

**Definizione di esponenziale nel campo complesso.**

Per ogni numero complesso  $\alpha = x + i y$  si pone:  $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$   
 Perciò, se  $x = 0$   $e^{iy} = \cos y + i \sin y = f(y).$  Da qui si vede che:  $e^{i(y+2\pi k)} = e^{iy}$  e  
 quindi la funzione esponenziale, nel campo complesso è periodica di periodo  
 $2\pi i$ :  $e^{z+2\pi i} = e^z.$

Poichè:  $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$  si ricavano le:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \text{ che sono dette } \mathbf{formule \text{ di } \text{Eulero.}}$$

Si possono così trovare  $\cos^m y$  e  $\sin^n y$  e si può definire anche il *logaritmo naturale* nel campo complesso. Posto  $e^w = z$  si ha

$$w_k = \ln |z| + i [\arg(z) + 2k\pi]$$

con  $k$  intero relativo qualunque. Per  $k = 0$  si ottiene

$w_0 = \ln |z| + i \arg(z)$  che viene detto *logaritmo principale* del numero complesso  $z.$

Perciò

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z).$$

## BIBLIOGRAFIA

- Antonio Avvantaggiati. *Istituzioni di Matematica*. Edizioni C. E. A. Milano 1991.
- Giuseppe Zwirner. *Istituzioni di Matematiche*. Per la Facoltà di Farmacia.
- Murray Spiegel. *Statistica*. Edizioni Schaumm.
- F. S. Budnick. *Applied Mathematics*. Mc Graw-Hill Int. Editions, 1986.
- J. G. Kemeny et al. *Matematica ed attività umane*. Vol. I. Ediz. Feltrinelli 1968.
- E. Batschelet. *Introduction to Mathematics for Life Scientists*. Springer Verlag 1979.
- The Committee on Educational Media of the Mathematical Society of America. *A Programmed Course in Calculus*. Edizioni W. Benjamin 1968.

## INDICE

Capitolo	I	Teoria degli insiemi	Pag.	1
		1.1 Definizioni		
		1.2 Relazioni tra insiemi		
		1.3 Operazioni tra insiemi		
		1.4 Partizione di un insieme		
“	II	Eventi e Probabilità	“	5
		2.1 Il metodo induttivo		
		2.2 Operazioni logiche tra eventi		
		2.3 Diagrammi di Venn		
		2.4 Eventi logicamente dipendenti		
		2.5 La probabilità		
		2.6 Probabilità subordinate		
		2.7 Distribuzioni di probabilità		
		2.8 Calcolo combinatorio		
		2.9 Classe di una permutazione		
		2.10 Variabili aleatorie e distribuzioni		
		2.11 La distribuzione bernoulliana		
		2.12 La distribuzione binomiale		
		2.13 La speranza matematica		
		2.14 Varianza e scarto quadratico medio		
		2.15 La distribuzione di Poisson		
		2.16 Variabili aleatorie continue		
		2.17 La distribuzione Normale o di Gauss.		
“	III	La stima	“	21
		3.1 Stima dei parametri di una distribuzione		
		3.2 Stima puntuale		
		3.3 Stima intervallare		
		3.4 Teorema del limite centrale		
		3.5 Stima della media di una popolazione		
		3.6 Distribuzione campionaria delle frequenze		
		3.7 Distribuzione delle differenze tra parametri		
“	IV	Regole di decisione	“	25
		4.1 Ipotesi ed osservazioni		
		4.2 Decisioni statistiche.		
		4.3 Errori di decisione		
		4.4 Regole di decisione e distribuzioni		
		4.5 Test basati sulla distribuzione normale		
		4.6 Test ad una o a due code		
		4.7 Teoria dei piccoli campioni		
		4.8 Gradi di libertà		
		4.9 La distribuzione t di Student		
		4.10 La distribuzione F		
		4.11 La distribuzione del $\chi^2$		
“	V	Insiemi numerici e coordinate cartesiane	“	43
		5.1 Intervalli		

	5.2	Coppie ordinate e prodotti cartesiani		
	5.3	Ascisse sulla retta		
	5.4	Coordinate cartesiane sul piano		
	5.4	Coordinate cartesiane nello spazio		
	5.5	Coordinate polari.		
“	VI	Le Funzioni	“	48
	6.1	Relazioni		
	6.2	Funzioni		
	6.3	Successioni e serie		
	6.4	Rappresentazione di una funzione		
	6.5	Operazioni algebriche tra funzioni		
	6.6	Funzioni composte		
	6.7	Funzioni inverse		
“	VII	I Limiti	“	59
	7.1	Il concetto di limite		
	7.2	Continuità		
	7.3	Teorema fondamentale		
	7.4	Continuità di una funzione composta		
	7.5	Ancora sui limiti		
	7.6	Limite infinito		
	7.7	I principali teoremi sui limiti		
	7.8	Discontinuità		
	7.9	Esempi ed applicazioni		
	7.10	Infiniti ed infinitesimi		
“	VIII	Le Derivate	“	71
	8.1	Velocità istantanea		
	8.2	Tangente ad una curva		
	8.3	Farmacocinetica		
	8.4	Definizione di derivata		
	8.5	Funzioni differenziabili		
	8.6	Derivata della somma, differenza e prodotto		
	8.7	Derivata di un polinomio		
	8.8	Continuità di funzioni differenziabili		
	8.9	Derivata del quoziente		
	8.10	Derivata di una funzione composta		
	8.11	Esempi ed applicazioni		
	8.12	Derivata di una funzione inversa		
	8.13	Tangente ad una curva		
	8.14	Approssimazione lineare		
	8.15	Differenziali		
	8.16	Derivate successive		
	8.17	Formule di Taylor e di Mc Laurin		
	8.18	Regola di dell’Hospital.		
“	IX	Studio di Funzioni	“	76
	9.1	Massimi e minimi		
	9.2	Studio di curve piane		

		9.3	Concavità e convessità		
		9.4	Tracciare il grafico di una funzione		
“	X		Gli Integrali	“	86
		10.1	Integrale definito		
		10.2	Proprietà dell'integrale definito		
		10.3	Superfici e derivate		
		10.4	Integrale indefinito		
“	XI		Funzioni Trascendenti	“	94
		11.1	Esponenziali e logaritmi		
		11.2	Derivate e integrali		
		11.3	Funzioni trigonometriche		
“	XII		Tecniche di Integrazione	“	105
		12.1	Integrali immediati		
		12.2	Integrazione per sostituzione		
		12.3	Integrazione di funzioni razionali		
“	XIII		Funzioni di due variabili	“	111
		13.1	Dominio e rappresentazione		
		13.2	Limiti e continuità		
		13.3	Derivate parziali		
		13.4	Massimi e minimi		
“	XIV		Equazioni differenziali	“	116
		14.1	Struttura di una E.D.		
		14.2	E.D. a variabili separabili		
		14.3	Il problema di Cauchy		
		14.4	Equazioni lineari		
Appendice	I		Correlazione e Regressione	“	121
		A1.1	Relazioni tra variabili aleatorie		
		A1.2	Regressione		
		A1.3	Il metodo dei minimi quadrati		
		A1.4	La covarianza		
		A1.5	Correlazione		
		A1.6	Il test di Student		
	II		Matrici e determinanti		126
	III		Numeri reali e complessi		128
			Bibliografia	“	130
			Indice	“	131