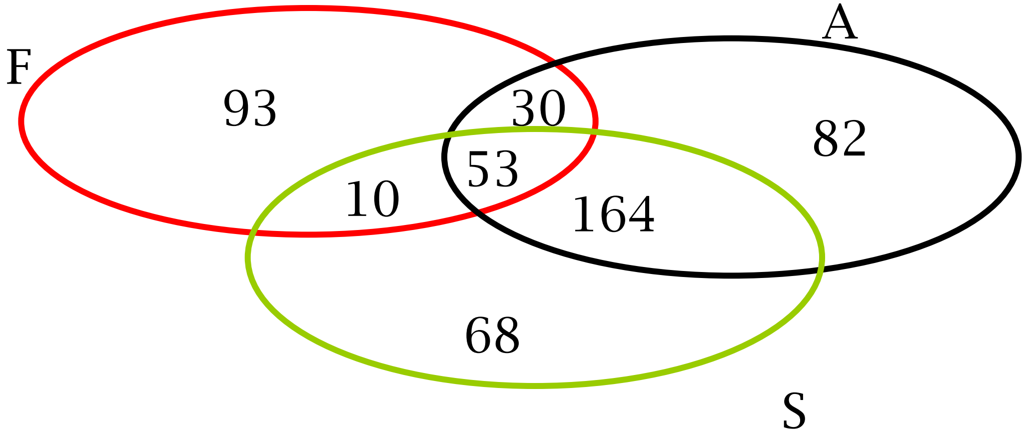
Esercizio 1

Durante un'inchiesta su 500 studenti frequentanti i corsi di Algebra (A), Fisica (F) e Statistica è stato rilevato che:

A 329 F 186 S 295 AS 217 AF 83 FS 63 AFS 53

- Determinare la partizione dell'insieme di tutti gli studenti.
- Determinare la distribuzione generale di probabilità indicando gli eventi possibili e le relative probabilità



Ricordando che con il simbolo A indichiamo l'evento complementare ad $\overline{A}$, abbiamo i seguenti eventi con le relative probabilità:

$A\,\overline{F}\,\overline{S}$ = { frequenta solo algebra} P = 82/500

$\overline{A}\,F\,\overline{S}$ = { frequenta solo fisica} P = 93/500

$\overline{A}\,\overline{F}\,S$ = { frequenta solo statistica} P = 68/500

$\overline{A}\,F\,S$ = { frequenta solo fisica *e* solo statistica} P = 10/500

....

A F S = {frequenta algebra *e* fisica *e* statistica} P = 53/500

Esercizio 2

La probabilità di laurearsi di uno studente che entra all'università è di 0,4.

- Determinare la probabilità che su 5 studenti

  a)nessuno, b) uno, c) almeno uno, d) tutti, riescano a laurearsi.
- Indicare anche gli eventi collegati a questa distribuzione di probabilità
- Calcolare la probabilità che su 50 studenti se ne laureino 35 ricorrendo alla distribuzione di Poisson.

Per calcolare la probabilità richiesta osserviamo la variabile aleatoria

$$X = \{\text{numero di studenti che si laureano}\}$$

Segue la distribuzione binomiale con probabilità di successo $p = 0,4$ e probabilità di insuccesso $q = 1\text{-}p = 0,6$

Quindi avremo le seguenti probabilità:

a) $P\{X=0\} = \binom{5}{0} (0,4)^0 \ (0,6)^5 = (0,6)^5 = 0,07776$

b) $P\{X=1\} = \binom{5}{1} (0,4)^1 \ (0,6)^4 = 0,2592$

c) $P\{X \geq 1\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} + P\{X=4\} + P\{X=5\} =$

$$=1- P\{X=0\} = 1- 0,07776 = 0,92224$$

d) $P\{X=5\} = \binom{5}{5} (0,4)^5 \ (0,6)^0 = (0,4)^5 = 0,01024$

Usiamo la distribuzione di Poisson di parametro $m = np$ per calcolare la probabilità che su 50 studenti se ne laureino 35.

$m = np = 50 \cdot 0,4 = 20$

$$P\{X=35\} = (m^k \cdot e^{-m}) / k! = (20^{35} \cdot e^{-20}) / 35!$$

Esercizio 3

In un esperimento condotto per studiare l'effetto su animali di laboratorio di una vaccinazione contro una certa malattia, è stato trovato che:

	Si ammalano	Non si ammalano
Vaccinati	9	42
Non vaccinati	17	28

- Dire quali sono le distribuzioni di probabilità collegate a questo esperimento indicando gli eventi possibili e relative probabilità
- Dire poi se si può utilizzare una correlazione tra le due caratteristiche in base al teorema di Bayes

- Osservazione: possiamo assumere che le frequenze relative riportate in tabella , siano così precise da poterle usare come probabilità degli eventi.
- Indichiamo con

V = {animale vaccinato}

N = {animale non vaccinato}

M = {animale malato}

S = {animale sano}

I possibili eventi dello spazio di probabilità saranno allora i seguenti:

VM = {animale vaccinato e malato}

VS = {animale vaccinato e sano}

NM = {animale non vaccinato e malato}

NS = {animale non vaccinato e sano}

le cui probabilità si ricavano direttamente dalla tabella:

P (VM) = 9/96
P (VS) = 42/96
P (NM) = 17/96
P (NS) = 28/96
dove 96 rappresenta il numero totale di animali osservati.

L’evento V = {animale vaccinato} considerato come un sottoinsieme dello spazio di probabilità, è un evento composto:

$$V = \{VM, VS\}$$

La probabilità dell’evento V è la probabilità di essere vaccinato sul totale della popolazione:
P (V) = 51/96

Analogamente l’evento M = {animale malato} è un evento composto:

$$M = \{MV, MN\}$$

La probabilità dell’evento M è la probabilità di essere malato sul totale della popolazione:
P (M) = 26/96

- Vediamo ora se c'è una correlazione tra l'evento M = {animale malato} e l'evento V = {animale vaccinato}

Calcoliamo il coefficiente di correlazione in questo modo:

$$\frac{P\left\{M/V\right\}}{P\left\{M\right\}}$$

dove per il teorema di Bayes si ha che

$$P\{M/V\}=\frac{P\left\{M\bigcap V\right\}}{P\left\{V\right\}}$$

- Sostituendo i valori numerici si ottiene un coefficiente di correlazione minore di 1:

come si interpreta questo risultato?

Significa che l’evento V, vaccinazione di un animale diminuisce la probabilità del verificarsi dell’evento M, cioè della possibilità di ammalarsi
(che è quello che ci si aspetta!)

Esercizio 4

Ad un esame di matematica la media dei voti è stata di 72 con scarto quadratico medio 15.

- Calcolare i valori standard dei voti a) 60, b) 93, c) 72, d) <60
- Calcolare i valori corrispondenti della funzione densità normale di probabilità deducendole dalle tabelle.

Ricordiamo che i valori standardizzati si ottengono dalla

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Dove

μ è la media e σ è lo scarto quadratico a)

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} - = \frac{60-72}{15} = \frac{-12}{15} = -0{,}8$$

b)

$$z = \frac{93-72}{15} = \frac{21}{15} = 1{,}4$$

c)

$$z = \frac{72-72}{15} = \frac{0}{15} = 0$$

- Utilizzando le tabelle calcoliamo i valori corrispondenti della funzione di densità normale di probabilità per i tre valori di z appena trovati:

a) Sfruttando la simmetria della funzione di densità normale si ha che

   $f(-0,8) = f(0,8) = 0,2897$

b) $f(1,4) = 0,1497$

c) $f(0) = 0,3989$

- Calcoliamo i valori corrispondenti della funzione di ripartizione di probabilità (area sottesa alla curva):

a) $F(-0,8) = 1-F(0,8)$

$F(0,8)= 0,5+0,2881 = 0,7881$ da cui

$F(-0,8)= 1-0,7881 = 0,2119$

b) $F(1,4) = 0,5+0,4192 = 0,9192$

c) $F(0) = 0,5$

Esercizio 5

Un campione casuale di 100 studenti ha dato un peso medio di 67,45 kg con una varianza di 8,61.

- Calcolare gli intervalli di confidenza al 99% e al 95% per la stima del peso medio degli studenti dell'università

Supponendo che il campione in esame segua la distribuzione normale, sappiamo che la media campionaria si trova con il

95% di probabilità nell'intervallo $\bar{x} \pm 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e con il 99% di

probabilità nell'intervallo $\bar{x} \pm 2{,}58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Calcoliamo prima di tutto lo scarto quadratico:

$$s = \sqrt{8,61} = 2,93$$

a) intervallo di confidenza al 95% :

$$67,45 \pm 1,96 \cdot (2,93/\sqrt{100}) = 67,45 \pm 0,57$$

Quindi la media della popolazione si trova con una probabilità del 95% tra 66,88 e 68,02, ovvero:

$$P\{66,88 \leq \mu \leq 68,02\} = 0,95$$

b) intervallo di confidenza al 99% :

$$67,45 \pm 2,58 \cdot (2,93/\sqrt{100}) = 67,45 \pm 0,76$$

Quindi la media della popolazione si trova con una probabilità del 99% tra 66,88 e 68,02, ovvero:

$$P\{66,69 \leq \mu \leq 68,21\} = 0,99$$