**FACOLTA' DI FARMACIA**
**Corso di Laurea in Scienza del Farmaco**
**II Prova mensile di Matematica e Informatica**
**A.A. 2011-2012**

Tema A Cognome e Nome ..............................................

1) Determinare il dominio delle funzioni:

$f_1(x) = \frac{x-1}{4+4x+x^2}$ ..........................................................................

$f_2(x) = \sqrt{x^2+2x} + \log(1-x^2)$ ....................................................

$f_3(x) = \ln(\tan x)$ .......................................................

**Svolgimento**

a).- La funzione $f_1(x)$ è una funzione razionale e quindi il suo campo di definizione sarà dato da tutti i valori reali tranne quelli che annullano il denominatore. Cioè quelli per i quali: $x^2 + 4x + 4 = 0$ e quindi x dovrà essere diversa da -2. In simboli possiamo scrivere $D = \{x / x \in \Re \wedge x \neq -2\}$.

b).- La funzione $f_2(x)$ è la somma di una radice (il cui radicando deve essere $\geq 0$ e di un logaritmo il cui argomento dovrà essere positivo. Dalla prima troviamo che la funzione $x^2 + 2x$ sarà positiva o nulla per x esterno all'intervallo [-2, 0] mentre l'argomento del logaritmo sarà positivo per valori di x compresi nell'intervallo (-1, +1). Calcolando le intersezioni dei due intervalli possiamo dire che la funzione $f_2(x)$ è definita per valori di x compresi tra -1 e 0. Pertanto $D = \{x / x \in \Re \wedge (-2 \leq x < 0\}$.

c) La funzione $f_3(x)$ è definita quando tan x è positiva e cioè quando x è compresa nell'intervallo (0°, 90°) a meno di multipli di 180°.

**Esercizio n. 2.** Tenendo conto dei limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ calcolare:

$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan 7x}{\sin 5x}$

$b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{2x}$

Verificando i risultati con la regola dei De l'Hospital

c) Data la funzione: $f_4(x) = \frac{4x^2 - 3}{3x-1}$

calcolare il limite per x tendente all'infinito di $f_4(x)$, di $\frac{1}{f_4(x)}$ e di $\frac{f_4(x)}{x}$

**Svolgimento.**
a) Moltiplichiamo e dividiamo il numeratore per 7x. Moltiplichiamo e dividiamo il denominatore per 5x. Otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 7x}{\sin 5x} = \quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7x\, sen 7x}{7x\cos 7x}}{\frac{5x\sin 5x}{5x}} = \frac{7}{5}$$

b) Ponendo il termine 2x = 1/z otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{2x} = \lim_{z\to\infty}\frac{\ln(\frac{1}{z}+1)}{1/z} = \lim_{z\to\infty}\ln(\frac{1}{z}+1)^{z} = \ln\, e = 1$$

Verifiche:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan 7x}{\sin 5x} = \quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{\cos^2 7x}}{5\cos 5x} = \frac{7}{5} \qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2x+1}\frac{1}{2} = 1$$

La $f_4(x) = \frac{4x^2-3}{3x-1}$ è una funzione razionale con il numeratore di grado superiore a quello del denominatore pertanto essa tende a +∞ per x tendente a +∞ e a -∞ per x tendente a -∞.

La funzione $\frac{1}{f_4(x)} = \frac{3x-1}{4x^2-3}$ è una funzione razionale con il denominatore di grado superiore a quello del numeratore. Pertanto, per x tendente all'infinito, essa tende a 0.

La funzione $\frac{f_4(x)}{x}$ è una funzione razionale con numeratore e denominatore dello stesso grado: $f_4(x) = \frac{4x^2-3}{3x^2-x}$ pertanto il limite per x tendente all'infinito sarà dato dal rapporto tra i coefficienti di grado massimo: 4/3.

**Esercizio n**. 3.- Calcolare le derivate delle 3 funzioni di cui al punto 1.
**Svolgimento.**

$$f_1(x) = \frac{x-1}{4+4x+x^2} \qquad f_1'(x) = \quad \frac{x^2+4x+4-(x-1)(2x+4)}{(4+4x+x^2)^2} = \frac{-x^2+2x+8}{(4+4x+x^2)^2}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x^2+2x} + \log(1-x^2) \quad \rightarrow \quad f_2'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} + \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$f_3(x) = \ln(\tan x) \qquad f_3'(x) = \frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}$$

**Esercizio n. 4**.- Il ricavo R(p) che si ottiene dalla vendita di un vaccino dipende dal prezzo e dalla quantità venduta. A sua volta la quantità venduta dipende dal prezzo secondo la legge: q = 4000 - 125p
Determinare il prezzo che produce il massimo ricavo. p = 12
Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva R(p) nel punto p =10.

**Svolgimento**.
Poiché il ricavo è uguale al prezzo per la quantità venduta, avremo R(p) = pq e quindi: R(p) = p(4000-125p) = 4000p – 125p$^2$
Per trovare il massimo di questa funzione calcoliamo la derivata rispetto a p:
R'(p) = 4000 - 250p che si annulla per p = 4000/250 = 12
R(10) = 40000-12500 = 27500 ; R'(10) = 4000-2500 = 1500
L'equazione della retta è: R – R(10) = R'(10)(p – 10) perciò: R = 1500(p –10) + 27500

**Esercizio n.5.-** Studiare la funzione: $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x - 2}$ e tracciarne il grafico.

**Svolgimento**
1) Dominio. La funzione è definita per x ≠ 2.
2) Segno. La funzione è positiva per x > 2, negativa altrove. Si annulla per x = -2.
3) f(-x) ≠ −f(x). La funzione non presenta simmetrie evidenti.
4) Limiti. La funzione ha un asintoto verticale per x = 2. Per x→+∞ tende a +∞, mentre per x→-∞ tende a -∞. Poiché il grado del numeratore è di una unità maggiore del grado del denominatore è probabile l'esistenza di un asintoto obliquo, del quale determiniamo il coefficiente angolare

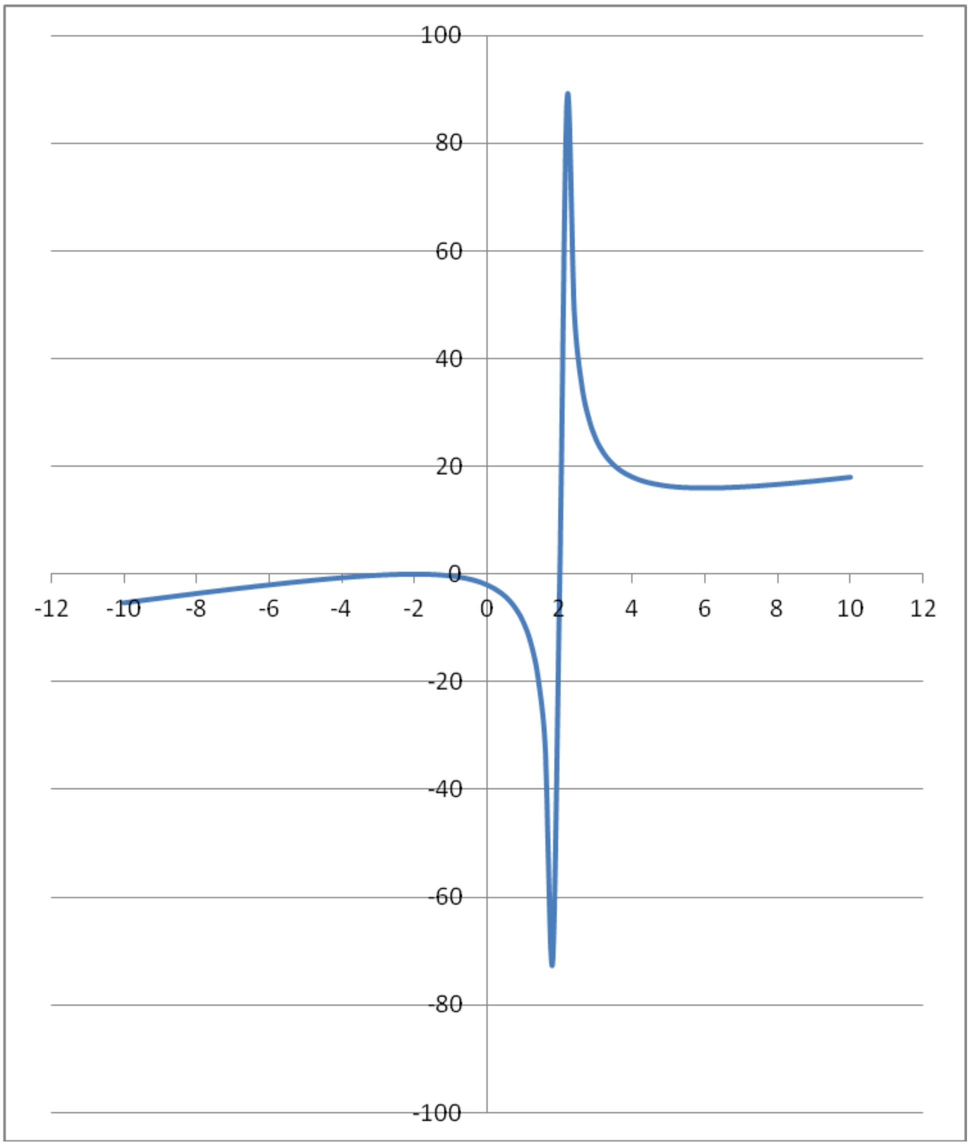
$m = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x(x-2)} = 1$ e l'intercetta: $q = \lim\limits_{x \to 0} [\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x - 2} - mx] = 6$

L'asintoto obliquo avrà pertanto equazione: y = x+6

5) Crescenza e decrescenza della funzione: calcolo della derivata prima. Per trovare i massimi o i minimi determiniamo i punti nei quali essa si annulla.

$\mathrm{f}'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} = 0$ e quindi $x^2$ - 4x – 12 = 0 che si annulla per $x_{12}$ = 2 ±4 e cioè: $x_1$ = -2 e $x_2$ = 6.
La funzione è crescente per valori di x esterni all'intervallo (-2, 6) decrescente altrove.
Pertanto avrà un massimo in (-2, 0) e un minimo in (6, 16)

6) La derivata seconda: $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{30}{(x-2)^3}$ cambia segno in x=2. Quindi per x<2 la concavità è rivolta verso il basso, mentre per x > 2 essa è rivolta verso l'alto.
Si può quindi abbozzare il grafico della funzione:


100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12