**FACOLTA' DI FARMACIA**
**Corso di Laurea in Scienza del Farmaco**
**Prova mensile di Matematica A.A. 2011-2012**
**Dicembre 2012**

**Problema n.1**.- Calcolare gli integrali indefiniti indicando il metodo usato:

a) $\int \frac{x^3-3x^2+x-5}{2x-3}dx$

b) $\int \frac{6x}{1-3x^2}\,dx$

c) $\int x^2(1-\cos x)dx$

**Svolgimento.**

a) La funzione integranda $\int \frac{x^3-3x^2+x-5}{2x-3}dx$ è una funzione razionale nella quale il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore. Possiamo quindi eseguire la divisione e otterremo un quoziente

Q(x) = $\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}$ ed un resto: R(x) = $\frac{55/8}{2x-3}$

La funzione integranda viene quindi scomposta nella somma di due termini:

$$\int \frac{x^3-3x^2+x-5}{2x-3}dx = \int \left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}\right)dx + \frac{55}{8}\int \frac{1}{2x-3}dx$$

Il primo termine è un polinomio, il secondo una funzione razionale che andrà risolta con il metodo di sostituzione.

I(x)= $\frac{x^3}{6}-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{55}{8}\int\frac{1}{2x-3}\,dx$ che si risolve ponendo 2x-3 = z e quindi dz = 2dx.

Di conseguenza $\frac{55}{8}\int\frac{1}{2x-3}dx = \frac{55}{16}\int \frac{1}{z}dz = \frac{55}{16}\ln|z|+c = \frac{55}{16}\ln|2x-3|+c$

Complessivamente perciò:

$$\int \frac{x^3-3x^2+x-5}{2x-3}dx = \frac{x^3}{6}-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{55}{16}\ln|2x-3|+c$$

b) L'integrale $\int \frac{6x}{1-3x^2}\,dx$ si risolve ricordando che il numeratore, a meno del segno è la derivata del denominatore. Ponendo quindi: z = 1 - 3x$^2$ vediamo che z' = -6x e di conseguenza:dz = -6x dx

$$\int \frac{6x}{1-3x^2}\,dx = -\int \frac{z'}{z}dz = -\ln|z|+c = -\ln\left|1-3x^2\right|+c$$

**Problema n. 2**.- Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \sqrt{2-x}\,dx$$

**Svolgimento**

Calcoliamo la primitiva della funzione integranda con il metodo di sostituzione ponendo z = 2 – x da cui dz = -dx e sostituendo:

$$-\int_0^1 \sqrt{z}\, dz = -\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(2-0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1-2^{\frac{3}{2}})$$

**Problema n. 3-** Calcolare tutte le derivate seconde della funzione.

$f(x, y) = 4x^5 + 3x^2y^2 + 6\, x^3$

**Svolgimento**

Derivate prime: $\frac{\partial f}{\partial x} = 20x^4 + 6xy^2 + 18x^2$ ; $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2 y$

Derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 80x^3 + 6y^2 + 36x$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12xy$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12xy$

**Problema n. 4**- Un ricercatore ha stabilito che il profitto annuale di una fattoria poteva essere descritto dalla funzione:

$$P(x, y) = 1200x + 1600y - 2x^2 - 4y^2 - 4xy$$

Dove P indica il profitto annuale in Euro, x l'estensione in acri seminata a soia e y quella seminata a grano.

Determinare il numero di acri a soia e grano che massimizzano il profitto annuale.

**Svolgimento**.

Per trovare gli eventuali punti di massimo calcoliamo le derivate parziali prime e poniamole uguali a 0.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1200 - 4x - 4y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 1600 - 8y - 4x$

Otteniamo così il sistema :

$$\begin{cases} 1200 - 4x - 4y = 0 \\ 1600 - 8y - 4x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 4y = 1200 \\ 4x + 8y = 1600 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 300 \\ x + 2y = 400 \end{cases}$$

Che ha come soluzione : $\quad$ y = 100/3 e x = 800/3

Calcoliamo le derivate seconde :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$

Il determinante Hessiano sarà quindi :

$\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 32 - 16 = 16 > 0$ $\quad$ e quindi il punto trovato è un punto di massimo.

**Problerma n. 5-** Calcolare l'integrale generale della equazione differenziale:

y'(x+4) - y = 0

imponendo la condizione iniziale y(0) = 3.

**Svolgimento.**

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili, per cui:

$\frac{dy}{dx}(x+4) - y = 0$ $\qquad$ $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+4}$ $\qquad$ per cui: ln|y| =ln|x+4| +c e quindi:

$y = k(x+4)$ $\qquad$ e poiché y(0) = 3 $\qquad$ sarà k = 3/4 e quindi: y = 3 (x+4)/4.