Analisi Matematica 2 : I prova intermedia
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001–2002.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso __________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[3]{n}}.$$

RISULTATO

La serie è convergente

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$, si ottiene

$$\mathrm{ord}_{+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[3]{n}} = \mathrm{ord}_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3}.$$

Si conclude, per il criterio dell'ordine di infinitesimo, che la serie è convergente.

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'origine della lamina delimitata dalla figura piana

$$E = \{(x,y)^T : x^2 + y^2 \le 1,\ x \le y \le 0\}$$

e avente densità di massa $\delta(x,y) = -2x$.

RISULTATO

$$\frac{\sqrt{2}}{5}$$

SVOLGIMENTO

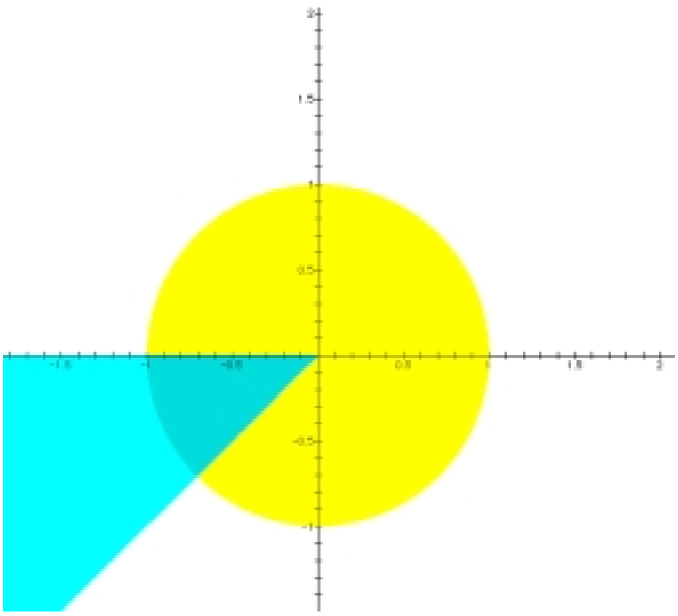
Passando a coordinate polari e ponendo

$$K = \{(\varrho,\vartheta)^T : 0 \le \varrho \le 1,\ -\pi \le \vartheta \le -\frac{3}{4}\pi\},$$

si ha

$$\iint_E (x^2+y^2)(-2x)\,dx\,dy = \iint_K -2\varrho^4 \cos\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta = \int_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi}\left(\int_0^1 -2\varrho^4\cos\vartheta\,d\varrho\right)d\vartheta$$

$$= -2\left(\int_0^1 \varrho^4 \cos\vartheta\,d\varrho\right)\left(\int_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta\right) = \frac{1}{5}\sqrt{2}.$$



COGNOME e NOME ________________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si sviluppi in serie di Taylor–Maclaurin la funzione

$$f(x) = \sin(3x^2)$$

e si usi tale sviluppo per determinare una primitiva F di f.

RISULTATI

- $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$
- $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3}$

SVOLGIMENTO

Poiché per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin(3x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

e quindi, integrando termine a termine,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli il volume del solido

$$E = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 2\}.$$

RISULTATO

$$\frac{8}{3}\pi\sqrt{2}$$

SVOLGIMENTO

• Si ha, usando la formula di riduzione per sezioni,

$$\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\iint_{S_z} 1\,dx\,dy \right) dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(\pi(4 - z^2) - 2\pi\big)\,dz$$

dove

$$S_z = \{(x, y)^T : 2 \geq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\}.$$

e quindi

$$\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(\pi(4 - z^2) - 2\pi\big)\,dz$$

$$= \pi \left[2z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{2}.$$