Analisi Matematica 2 : II prova intermedia
Corso: OMARI ○ TIRONI ○
A.a. 2001–2002.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + 4y^4 - 4xy.$$

RISULTATO

$(0,0)^T$ è punto di sella, $(2^{-1/4}, 2^{-3/4})^T$ e $(-2^{-1/4}, -2^{-3/4})^T$ sono punti di minimo relativo.

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 16y^3 - 4x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 48y^2 \end{pmatrix}.$$

I punti critici sono $(0,0)^T$, $(2^{-1/4}, 2^{-3/4})^T$ e $(-2^{-1/4}, -2^{-3/4})^T$. Poiché $Hf(0,0)$ è indefinita, si conclude che $(0,0)^T$ è punto di sella. Poiché $Hf(2^{-1/4}, 2^{-3/4})$ e $Hf(-2^{-1/4}, -2^{-3/4})$ sono definite positive, si conclude che $(2^{-1/4}, 2^{-3/4})^T$ e $(-2^{-1/4}, -2^{-3/4})^T$ sono punti di minimo relativo.

ESERCIZIO N. 2. Si determinino i punti di minimo assoluto e di massimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = 2x - y + 3z$$

su

$$E = \{(x, y, z)^T : 4x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

RISULTATO
I punti $(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{6}{\sqrt{11}})^T$ e $(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{6}{\sqrt{11}})^T$ sono rispettivamente il punto di massimo assoluto e il punto di minimo assoluto.

SVOLGIMENTO Poiché f è continua sull'ellissoide E, che è un insieme chiuso e limitato, f ha massimo assoluto e minimo assoluto su E. Inoltre, si ha

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix},$$

dove $g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2 = \lambda 8x \\ -1 = \lambda 2y \\ 3 = \lambda 2z \\ 4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \frac{1}{4\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{3}{2\lambda} \\ 4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \frac{1}{4\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{3}{2\lambda} \\ \frac{11}{4\lambda^2} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \frac{1}{4\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{3}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{11}}{4} \end{cases}.$$

Valutando la funzione f nei punti trovati, si conclude che $(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{6}{\sqrt{11}})^T$ e $(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{6}{\sqrt{11}})^T$ sono rispettivamente il punto di massimo assoluto e il punto di minimo assoluto.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x(y^2+1) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il massimo intervallo su cui la soluzione esiste.

RISULTATO

La soluzione massimale è $y(x) = \mathrm{tg}(x^2)$ ed è definita su $I = \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$.

SVOLGIMENTO

Poiché $y(t)^2 + 1 >$ per ogni $t \in I = \operatorname{dom} y$, si ha

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{1+y(t)^2}\,dt = \int_0^x 2t\,dt \iff \int_0^{y(x)} \frac{ds}{1+s^2}\,ds = x^2 \iff \operatorname{arctg}(y(x)) = x^2 \iff y(x) = \mathrm{tg}(x^2),\ x^2 < \frac{\pi}{2}.$$

Quindi la soluzione massimale è $y(x) = \mathrm{tg}(x^2)$ ed è definita su $I = \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$.

ESERCIZIO N. 4. Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = 1 + e^x.$$

RISULTATO
La soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 1 + \frac{1}{4} e^x, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

SVOLGIMENTO L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$$

ha la radice $\lambda_0 = -1$ di molteplicità 2. Quindi, la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y'' + 2y' + y = 0$$

è

$$z(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x},$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Una soluzione particolare dell'equazione completa

$$y'' + 2y' + y = 1 + e^x$$

per il principio di sovrapposizione è $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, con $\bar{y}_1$ una soluzione particolare di

$$y'' + 2y' + y = 1$$

e $\bar{y}_2$ una soluzione particolare di

$$y'' + 2y' + y = e^x.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, si trova

$$\bar{y}_1(x) = 1$$

e

$$\bar{y}_2(x) = \frac{1}{4} e^x.$$

In conclusione, la soluzione generale di

$$y'' + 2y' + y = 1 + e^x$$

è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 1 + \frac{1}{4} e^x, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$