Esame di Analisi matematica II : esercizi
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001-2002, sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Si risolvano gli esercizi : 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 ◯ 6 ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie di numeri reali

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{1+n^2}.$$

RISULTATO

La serie è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

SVOLGIMENTO

Poiché $\operatorname{ord}_{+\infty} \frac{n^\alpha}{1+n^2} = 2 - \alpha$, si conclude, per il criterio dell'ordine di infinitesimo, che la serie converge se e solo se $2 - \alpha > 1$, ossia se e solo se $\alpha < 1$.

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme di convergenza e la somma della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(i - nz).$$

RISULTATO

La serie converge, con somma $\dfrac{\exp(i)}{1-\exp(-z)}$, se e solo se $\Re e\, z > 0$.

SVOLGIMENTO

La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w^n,$$

con $w \in \mathbb{C}$, converge, con somma $\frac{1}{1-w}$, se e solo se $|w| < 1$. Quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-nz) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\exp(-z))^n$$

converge se e solo se $|\exp(-z)| < 1$. Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $|\exp(-z)| < 1$ se e solo se $e^{-x} < 1$, ossia se e solo se $x > 0$. Inoltre, se $x > 0$ risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(i - nz) = \exp(i) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-nz) = \frac{\exp(i)}{1-\exp(-z)}.$$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume di

$$E = \{(x, y, z)^T : |x| \le 1, 0 \le y \le 1 - |x|, 0 \le z \le 2 + x + y\}.$$

RISULTATO

$$\frac{7}{3}$$

SVOLGIMENTO

Posto $D = \{(x, y)^T : |x| \le 1, 0 \le y \le 1 - |x|\}$, si ha, usando le formule di riduzione,

$$\iiint_E 1\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_0^{2+x+y} 1\, dz \right) dx\, dy = \iint_D (2 + x + y)\; dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-|x|} (2 + x + y)\; dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left((1 - |x|)(2 + x) + \frac{1}{2}(1 - |x|)^2 \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^1 (1 - x) dx + \int_0^1 (1 - x)^2 dx = 2 + \frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2 + 1.$$

RISULTATO

$(0,0)^T$ è punto di sella, $(-1/\sqrt{2},0)^T$ e $(1/\sqrt{2},0)^T$ sono punti di minimo relativo.

SVOLGIMENTO

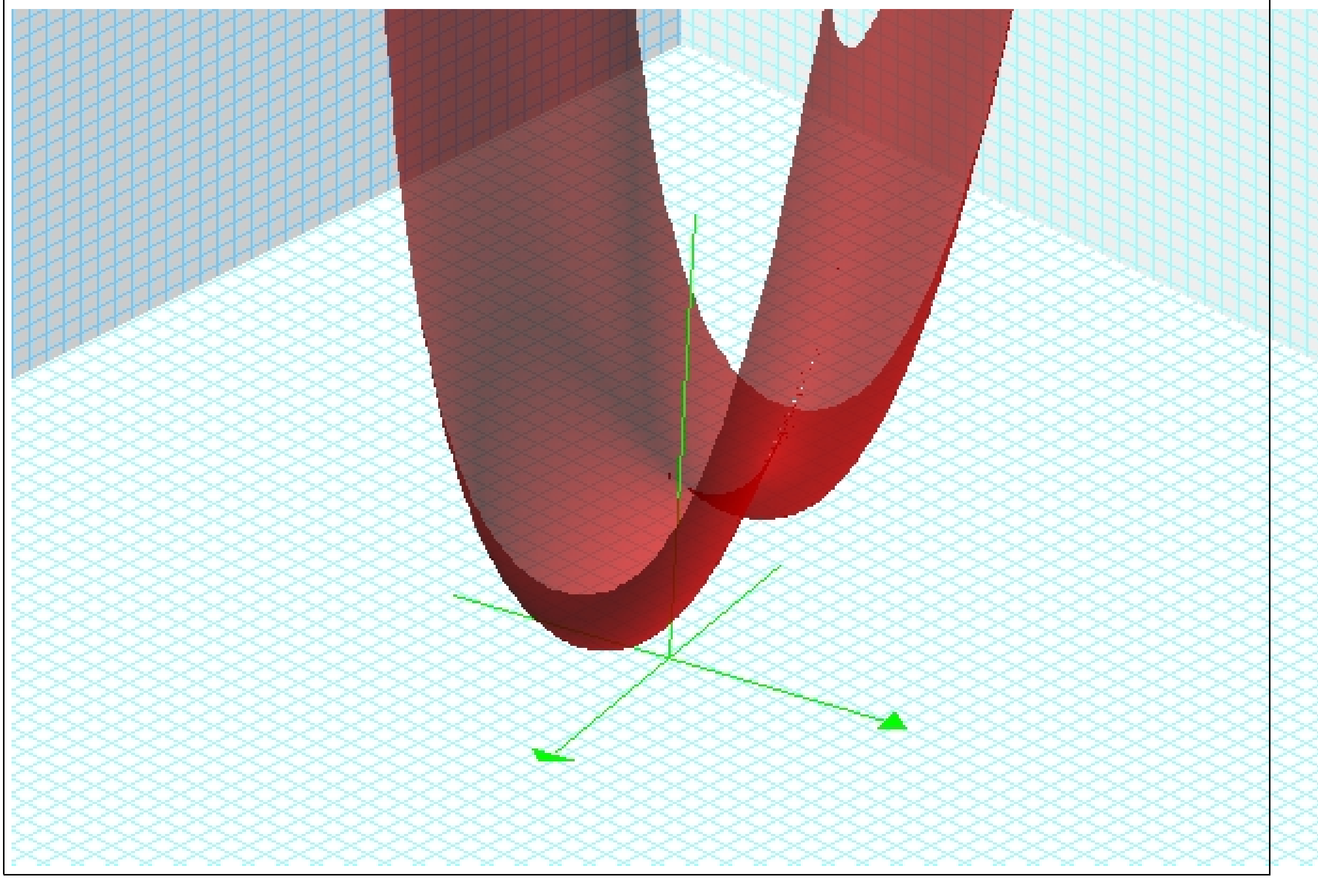
Si ha

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x \\ 4y^3 + 2y \end{pmatrix}$$

e

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

I punti critici sono $(0,0)^T$, $(-1/\sqrt{2},0)^T$ e $(1/\sqrt{2},0)^T$. Poiché $H(0,0)$ è indefinita, $H(-1/\sqrt{2},0)$ e $H(1/\sqrt{2},0)$ sono definite positive si conclude che $(0,0)^T$ è punto di sella, $(-1/\sqrt{2},0)^T$ e $(1/\sqrt{2},0)^T$ sono punti di minimo relativo.



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 5. Si risolva su $\mathbb{R}^+$ l'equazione differenziale lineare

$$y'' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}.$$

RISULTATO

La soluzione generale su $\mathbb{R}^+$ è

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + c_2 x^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} - 1,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

Effettuando il cambio di variabile $x := e^t$ e ponendo $u(t) := y(e^t)$, si ottiene l'equazione lineare con coefficienti costanti

$$u'' - u' - u = 1.$$

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

ha radici $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Quindi, la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$u'' - u' - u = 0$$

è

$$v(t) = c_1 e^{(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})t} + c_2 e^{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})t},$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Una soluzione particolare dell'equazione completa

$$u'' - u' - u = 1$$

è

$$\bar{v}(t) = -1.$$

Dunque la soluzione generale dell'equazione completa

$$u'' - u' - u = 1$$

è

$$u(t) = c_1 e^{(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})t} + c_2 e^{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})t} - 1,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In conclusione, la soluzione generale su $\mathbb{R}^+$ di

$$y'' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}.$$

è

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + c_2 x^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} - 1,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 6. Si calcoli

$$\int_\gamma < g, \tau > \, ds$$

dove

$$g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^T \qquad \text{e} \qquad \gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)^T, \qquad \text{con } t \in [\pi/2, 2\pi].$$

RISULTATO

$$\frac{3}{2}\pi$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)^T$$

e

$$\int_\gamma < g, \tau > \, ds = \int_{\pi/2}^{2\pi} < g(\gamma(t), \gamma'(t) > dt = \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{t\cos t \cdot (\cos t - t\sin t)}{\sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}} + \frac{t\sin t \cdot (\sin t + t\cos t)}{\sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}} \, dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^{2\pi} (\cos t \cdot (\cos t - t\sin t) + \sin t \cdot (\sin t + t\cos t) \ ) \, dt = \int_{\pi/2}^{2\pi} 1 \, dt = \frac{3}{2}\pi,$$

o, più semplicemente, posto

$$G(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\int_\gamma < g, \tau > \, ds = \int_{\pi/2}^{2\pi} < g(\gamma(t), \gamma'(t) > dt = \int_{\pi/2}^{2\pi} < \nabla G(\gamma(t), \gamma'(t) > dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{d}{dt} G(\gamma(t)) \, dt = G(\gamma(2\pi)) - G(\gamma(\pi/2)) = \frac{3}{2}\pi.$$