Esame di Analisi matematica II : esercizi
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001-2002, sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Si risolvano gli esercizi : 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 ◯ 6 ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i\sqrt{n}}{i-n^2}.$$

RISULTATO

La serie è (assolutamente) convergente.

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\left|\frac{i\sqrt{n}}{i-n^2}\right| = \frac{\sqrt{n}}{|n^2-i|} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}}$$

e

$$\mathrm{ord}_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{3}{2}.$$

Dunque, per il criterio dell'ordine di infinitesimo, la serie è (assolutamente) convergente.

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z} - i\right)^n,$$

con $z \in \mathbb{C}$.

RISULTATO

La serie converge, con somma $\dfrac{1}{1+i-\frac{1}{z}}$, se e solo se $\Im m\, z < -1/2$.

SVOLGIMENTO La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w^n,$$

con $w \in \mathbb{C}$, converge, con somma $\frac{1}{1-w}$, se e solo se $|w| < 1$. Quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z} - i\right)^n$$

converge se e solo se $z \neq 0$ e $\left|\frac{1}{z} - i\right| < 1$. Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha per ogni $z \neq 0$

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| < 1 \iff |1 - iz| < |z| \iff |1 + y - ix| < |x + iy|$$

$$\iff (y+1)^2 + x^2 < x^2 + y^2 \iff 2y + 1 < 0 < x^2 + y^2 \iff y < -1/2.$$

Inoltre, se $y < -1/2$, risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z} - i\right)^n = \frac{1}{1+i-\frac{1}{z}}.$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\iiint_E |x|\, dx\, dy\, dz,$$

con

$$E = \{(x,y,z)^T : |x| \le 1, 0 \le y \le x^2, 0 \le z \le |x| + y\}.$$

RISULTATO

$$\frac{17}{30}$$

SVOLGIMENTO

Posto $D = \{(x,y)^T : |x| \le 1, 0 \le y \le x^2\}$, si ha, usando le formule di riduzione,

$$\iiint_E |x|\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_0^{|x|+y} |x|\, dz \right) dx\, dy = \iint_D (|x| + y)\, |x|\, dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} (|x| + y)\, |x|\, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 + \frac{1}{2}|x|\, x^4 \right) dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^4 + \frac{1}{2}x^5 \right) dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12}x^6 \right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \right) = \frac{17}{30}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si determinino gli estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^4 + 2y^2.$$

RISULTATO

$(0,0)^T$ è punto di minimo relativo, $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$.

SVOLGIMENTO

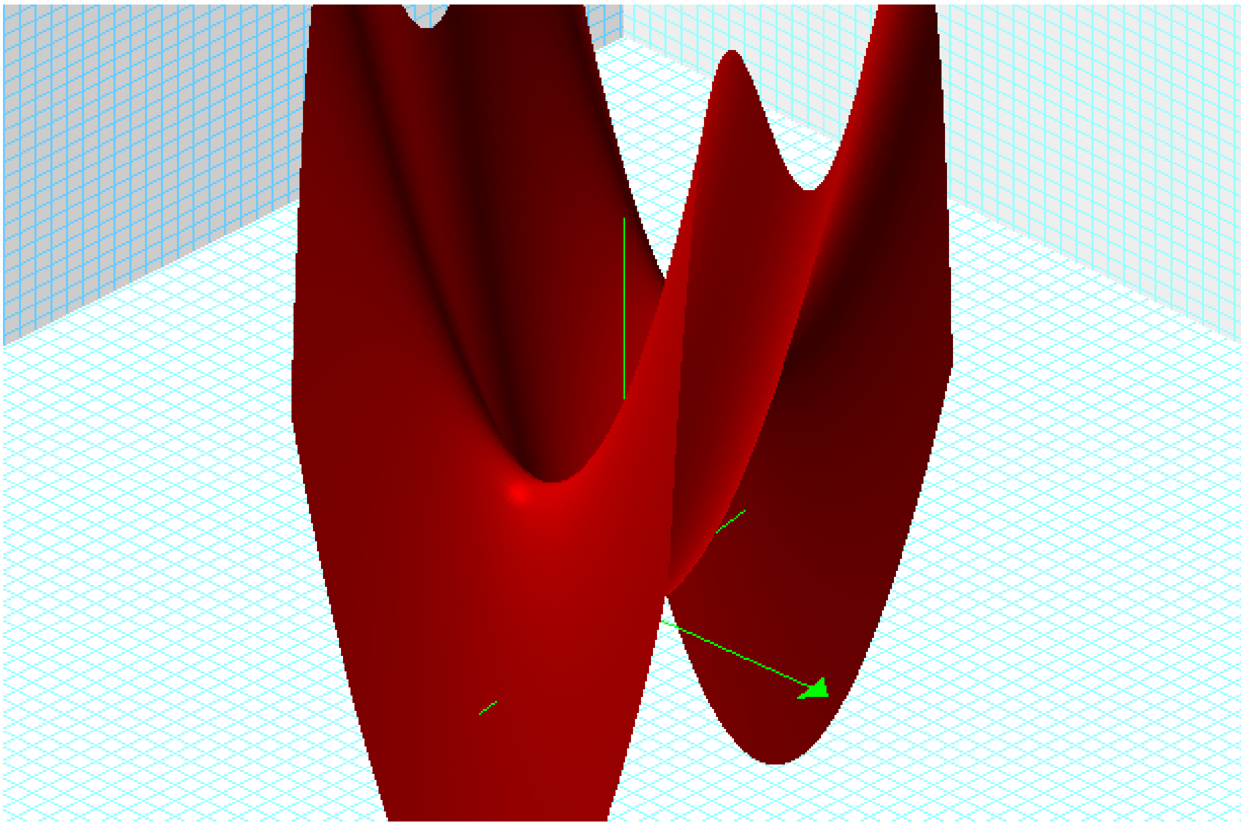
Si ha $f(x,0) = x^2$ e $f(0,y) = 2y^2 - y^4$ e quindi $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Inoltre, risulta

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y - 4y^3 \end{pmatrix}$$

e

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}.$$

I punti critici sono $(0,0)^T$, $(0,-1)^T$ e $(0,1)^T$. Poiché $H(0,0)$ è definita positiva, $H(-1/\sqrt{2},0)$ e $H(1/\sqrt{2},0)$ sono indefinite, si conclude che $(0,0)^T$ è punto di minimo relativo, $(0,-1)^T$ e $(0,1)^T$ sono punti di sella.



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 5. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

RISULTATO

La soluzione è

$$y(x) = e^{\frac{1}{x}-1}, \qquad \text{con } x \in]0, +\infty[.$$

SVOLGIMENTO

Si ha, per il teorema di unicità, $y(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e quindi

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases} \iff \int_1^x \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int_1^x -\frac{1}{t^2}\,dt \iff \int_{y(1)=1}^{y(x)} \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{x} - 1$$

$$\iff \log y(x) = \frac{1}{x} - 1 \iff y(x) = e^{\frac{1}{x}-1}.$$

ESERCIZIO N. 6. Si calcoli

$$\int_\gamma \langle \nabla f, \tau \rangle \, ds$$

dove

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$$

e

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)^T \qquad \text{con } t \in [0, +\infty[.$$

(τ indica il versore tangente alla curva.)

RISULTATO

$$\frac{\pi}{2}$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\int_\gamma \langle \nabla f, \tau \rangle \, ds = \int_0^{+\infty} \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (f(\gamma(b)) - f(\gamma(0))) = \lim_{b \to +\infty} (\operatorname{arctg}\,(b^2) - \operatorname{arctg}\,(0)) = \frac{\pi}{2}.$$