Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria. Trieste, 17 giugno 2002

Esame di Analisi matematica II : esercizi
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001-2002, sessione estiva, I appello.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Appello in cui si intende sostenere la prova di teoria : I ◯ II ◯ III ◯

Si risolvano gli esercizi : 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 ◯ 6 ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ \log n}.$$

RISULTATO

La serie è semplicemente convergente.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una serie con i termini di segno alterno. La successione $\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ \log n}\right)_n$ è crescente e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ \log n} = 0.$$

Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie è convergente. Poiché

$$\mathrm{ord}_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ \log n} < 1,$$

la serie è assolutamente divergente e dunque semplicemente convergente.

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\iint_E \frac{2y}{x+1}\,dxdy,$$

con $E = \{(x,y)^T : x \geq 1,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\}$.

RISULTATO

$$\log 2$$

SVOLGIMENTO

Posto, per ogni n, $A_n = \{(x,y)^T : 1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\}$, si ha

$$\iint_{A_n} \frac{2y}{x+1}\,dxdy \;= \int_1^n \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{2y}{x+1} dy \right) dx$$

$$= \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^n \frac{1}{x} dx - \int_1^n \frac{1}{x+1} dx = \left[\log \frac{x}{x+1} \right]_1^n = \log \frac{n}{n+1} + \log 2 \to \log 2,$$

se $n \to +\infty$. Quindi risulta

$$\iint_E \frac{2y}{x+1}\,dxdy = \log 2.$$

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} i\,(n+2)\,z^n.$$

(i) Si determini il raggio di convergenza della serie.

Poiché

$$\frac{|i(n+3)z^{n+1}|}{|i(n+2)z^n|} = \frac{n+3}{n+2}|z| \to |z|$$

se $n \to +\infty$, si conclude per il criterio del rapporto che la serie converge se $|z| < 1$ e non converge se $|z| > 1$. Dunque il raggio di convergenza è 1.

(ii) Si calcoli la somma della serie.

Si ha, per $|z| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} i\,(n+2)\,z^n = iz\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} + 2iz\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = iz\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) + 2iz\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1}$$

$$= iz\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) + 2iz\frac{1}{1-z} = \frac{iz}{(1-z)^2} + \frac{2iz}{1-z} = \frac{iz(3-2z)}{(1-z)^2}.$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria. Trieste, 17 giugno 2002

ESERCIZIO N. 4. Si determinino gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{y - 2x^2}$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y)^T \in \mathrm{I\!R}^2 : x \geq 0,\ 2y \leq x^2 + 1\}.$$

RISULTATO

$$\min_{E \cap \mathrm{dom} f} f = 0, \qquad \max_{E \cap \mathrm{dom} f} f = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

SVOLGIMENTO

Si devono studiare gli estremi di f su

$$E \cap \mathrm{dom} f = \{(x,y)^T : 0 \leq x \leq 1/\sqrt{3},\ 2x^2 \leq y \leq (x^2+1)/2\}.$$

Poiché $E \cap \mathrm{dom} f$ è un insieme chiuso e limitato e f è continua, allora f ha minimo e massimo assoluti su $E \cap \mathrm{dom} f$. Poiché

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-2x}{\sqrt{y-2x^2}}, \frac{1}{2\sqrt{y-2x^2}} \right)^T \neq (0,0)^T$$

in $\mathrm{int}(E \cap \mathrm{dom} f)$, si conclude che i punti di estremo si trovano sulla frontiera di $E \cap \mathrm{dom} f$. La restrizione di f all'arco di parabola è identicamente nulla. La restrizione di f al segmento $\{(0,y)^T : 0 \leq y \leq 1/2\}$ ha minimo nel punto $(0,0)^T$, con $f(0,0) = 0$, e massimo nel punto $(0,1/2)^T$, con $f(0,1/2) = 1/\sqrt{2}$. La restrizione di f all'arco di parabola $\{(x,(x^2+1)/2)^T : 0 \leq x \leq 1/\sqrt{3}\}$ ha minimo nel punto $(1/\sqrt{3}, 2/3)^T$, con $f(1/\sqrt{3}, 2/3) = 0$, e massimo nel punto $(0,1/2)^T$, con $f(0,1/2) = 1/\sqrt{2}$. Si conclude allora che $\min_{E \cap \mathrm{dom} f} f = 0$ e $\max_{E \cap \mathrm{dom} f} f = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria. Trieste, 17 giugno 2002

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 5. Si determini la soluzione dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 3xy' + y = x$$

che soddisfa alle condizioni

$$y(1) = 1, \quad y(e) = \frac{e}{4}.$$

RISULTATO

$$y(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{x} - \frac{3}{4}\frac{\log x}{x} + \frac{1}{4}x$$

SVOLGIMENTO

Si tratta di un'equazione di Eulero, che, alla luce delle condizioni imposte, deve essere risolta sull'intervallo $]0, +\infty[$. Con i cambi di variabile $x = e^t$ e $u(t) = y(e^t)$, si ottiene l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$u'' + 2u' + u = e^t.$$

L'equazione omogenea

$$u'' + 2u' + u = 0$$

ha come base di soluzioni $\{e^{-t}, te^{-t}\}$. Una soluzione particolare della completa è, per il metodo di somiglianza, $e^t/4$. Dunque la soluzione generale della completa è

$$u(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} + \frac{e^t}{4},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione di Eulero è

$$y(x) = A\frac{1}{x} + B\frac{\log x}{x} + \frac{1}{4}x,$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni al contorno si perviene al sistema lineare

$$\begin{cases} A + \dfrac{1}{4} = 1 \\ \dfrac{A}{e} + \dfrac{B}{e} + \dfrac{e}{4} = \dfrac{e}{4}, \end{cases}$$

dal quale si ottiene

$$A = \frac{3}{4}, \ B = -\frac{3}{4}.$$

In conclusione la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{x} - \frac{3}{4}\frac{\log x}{x} + \frac{1}{4}x.$$

ESERCIZIO N. 6. Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \left(x^2 + y^2 + \log z\right)\, ds,$$

dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\gamma(t) = \left(e^t\ \cos t,\ e^t\ \sin t,\ e^t\right)^T.$$

RISULTATO

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(e^3 + 2)$$

SVOLGIMENTO

Si ha, per $t \in [0,1]$,

$$\gamma'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)^T$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{3}e^t.$$

Quindi risulta

$$\int_\gamma \left(x^2 + y^2 + \log z\right)\, ds = \int_0^1 (e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + t)\sqrt{3}e^t\ dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 e^{3t}\ dt + \sqrt{3}\int_0^1 te^t\ dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[e^{3t}\right]_0^1 + \sqrt{3}\left[te^t\right]_0^1 - \sqrt{3}\left[e^t\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(e^3 + 2).$$