Esame di Analisi matematica II : esercizi

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2001-2002, sessione autunnale

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Si risolvano gli esercizi : 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 ◯ 6 ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - i\,n}{n + i\,3^n}.$$

RISULTATO

La serie è assolutamente convergente.

SVOLGIMENTO

Poiché

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n - i\,n}{n + i\,3^n}\right|} = \frac{2}{3}\sqrt[n]{\left|\frac{1 - i\,n\,2^{-n}}{n\,3^{-n} + i}\right|} \;\to\; \frac{2}{3},$$

se $n \to +\infty$, il criterio della radice assicura la convergenza assoluta della serie.

ESERCIZIO N. 2. Si determini il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e + \frac{1}{n}\right)^n z^{2n}.$$

RISULTATO

Il raggio di convergenza è $R = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

.

SVOLGIMENTO

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ha

$$\sqrt[n]{\left|\left(e + \frac{1}{n}\right)^n z^{2n}\right|} = \left(e + \frac{1}{n}\right) |z|^2 \ \rightarrow \ e\,|z|^2,$$

se $n \to +\infty$. Il criterio della radice assicura che la serie converge assolutamente se $|z| < \frac{1}{\sqrt{e}}$ e non converge se $|z| > \frac{1}{\sqrt{e}}$. Dunque il raggio di convergenza è

$$R = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\iint_E \frac{1}{y}\,dx\,dy,$$

con $E = \{(x,y)^T : 0 < x \le 1, x^2 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}}\}$.

RISULTATO

$$\frac{5}{2}$$

SVOLGIMENTO

Posto

$$A_n = \left\{(x,y)^T : \frac{1}{n} \le x \le 1, x^2 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}}\right\},$$

si ha

$$\iint_{A_n} \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_{x^2}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{y}\,dy \right) dx = -\frac{5}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \log x\,dx =$$

$$= -\frac{5}{2}\left[x \log x - x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = -\frac{5}{2}\left(-1 - \frac{1}{n}\log\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \;\to\; \frac{5}{2},$$

se $n \to +\infty$.

ESERCIZIO N. 4. Si determinino gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = e^x e^y e^z,$$

su $E = \{(x,y,z)^T : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 2\}$.

RISULTATO

$f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ è il massimo assoluto e $f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ è il minimo assoluto.

SVOLGIMENTO

Poiché exp è una funzione crescente, il problema si riduce allo studio degli estremi della funzione $g(x,y,z) = x + y + z$. Si ha

$$\nabla g(x,y,z) = (1,1,1)^T.$$

Quindi il massimo e il minimo assoluti di g su E, che esistono per il teorema di Weierstrass, vengono assunti in punti di fr$E$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si trova

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 8\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{9}{32} \end{cases},$$

da cui si ottengono i punti $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^T$ e $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^T$, che sono, rispettivamente, di massimo e di minimo assoluti.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ______________

ESERCIZIO N. 5. Si risolva l'equazione differenziale lineare

$$y''' - y = e^x.$$

RISULTATO

La soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}xe^x,$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

L'equazione caratteristica

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

ha radici $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, aventi molteplicità 1.

Quindi, la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y''' - y = 0$$

è

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Una soluzione particolare dell'equazione completa

$$y''' - y = e^x$$

è, per il metodo di somiglianza, $\bar{y}(x) = Axe^x$, con $A = \frac{1}{3}$.

In conclusione, la soluzione generale di

$$y''' - y = e^x$$

è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}xe^x,$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 6. Si calcoli la lunghezza della curva avente rappresentazione polare

$$\rho = \cos\vartheta$$

con $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

RISULTATO

$$\pi$$

SVOLGIMENTO

La curva ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \cos t \, \cos t \\ y = \cos t \, \sin t \end{cases}$$

con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi la sua lunghezza è data da

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2\cos t \sin t)^2 + (-\sin^2 t + \cos^2 t)^2}\, dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \pi.$$

(Più semplicemente, si poteva osservare che la curva è il cerchio di centro $(\frac{1}{2}, 0)^T$ e raggio $\frac{1}{2}$.)