Esame di Analisi matematica II : esercizi
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001-2002, sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

Si risolvano gli esercizi : **1** ◯ **2** ◯ **3** ◯ **4** ◯ **5** ◯ **6** ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri reali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \cos(\pi n).$$

RISULTATO

La serie è convergente.

SVOLGIMENTO

Si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\cos(\pi n) = (-1)^n,$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0,$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Dunque, per il criterio di Leibniz, la serie converge.

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-2x)^n}{n+1},$$

con $x \in \mathbb{R}$.

RISULTATO

La serie converge per $0 < x \leq 1$, con somma

$$\frac{\log(2x)}{2x-1}.$$

SVOLGIMENTO

La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$

converge per $|t| < 1$, con somma

$$\frac{1}{1-t}.$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1},$$

ottenuta integrando termine a termine, converge per $-1 \leq t < 1$, con somma

$$\int_0^t \frac{1}{1-s}\, ds = -\log(1-t).$$

Quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{t} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{-\log(1-t)}{t} & \text{se } -1 \leq t < 1, t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}.$$

Posto $t := 1 - 2x$, si conclude che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-2x)^n}{n+1}$$

converge per $0 < x \leq 1$, con somma

$$\frac{\log(2x)}{2x-1}.$$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume del solido

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq z,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

RISULTATO

$$\frac{7}{2}\pi$$

SVOLGIMENTO

Posto $D = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 1\}$, si ha, usando la formula di riduzione per corde e passando a coordinate polari,

$$\iiint_E 1\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^4 1\, dz \right) dx\, dy = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(4 - \rho^2\right) \rho\, d\rho \right) d\vartheta = 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \frac{7}{2}\pi.$$

ESERCIZIO N. 4. Si calcolino massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 - xy^2$$

su

$$C = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

RISULTATO

$$\min_C f = f(1/3, -2\sqrt{2}/3) = f(1/3, 2\sqrt{2}/3) = -5/27 \quad \text{e} \quad \max_C f = f(-1,0) = f(1,0) = 1.$$

SVOLGIMENTO

Poichè f è continua sull'insieme chiuso e limitato C, essa è dotata di minimo e massimo assoluti. Posto $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, i punti di estremo vanno ricercati, per il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \text{oppure} \quad \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ \lambda = -x \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \lambda = -x \end{cases}.$$

Confrontando i valori di f nei punti

$$(-1,0)^T, (1,0)^T, (1/3, -2\sqrt{2}/3)^T, (1/3, 2\sqrt{2}/3)^T,$$

si conclude che

$$\min_C f = f(1/3, -2\sqrt{2}/3) = f(1/3, 2\sqrt{2}/3) = -5/27$$

e

$$\max_C f = f(-1,0) = f(1,0) = 1.$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + y^4 \\ y(1) = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}. \end{cases}$$

RISULTATO

La soluzione è

$$y(x) = \left(x^3 + \frac{3}{2}x\right)^{-1/3}.$$

SVOLGIMENTO

Si tratta di un problema ai valori iniziali per un'equazione di Bernoulli. Con il cambio di variabile

$$u = y^{-3},$$

si ottiene il problema lineare

$$\begin{cases} u' = \dfrac{3}{x}u - 3 \\ u(1) = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

La soluzione generale dell'equazione lineare omogenea

$$u' = \frac{3}{x}u$$

è

$$u_0(x) = cx^3,$$

con $c \in \mathbb{R}$, mentre una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\bar{u}(x) = x^3 \int_1^x -3t^{-3}\, dt = \frac{3}{2}(x - x^3).$$

Imponendo la condizione iniziale $u(1) = \frac{5}{2}$, si trova $c = \frac{5}{2}$ e quindi

$$u(x) = \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}(x - x^3).$$

In conclusione, si ha

$$y(x) = \left(x^3 + \frac{3}{2}x\right)^{-1/3}.$$

ESERCIZIO N. 6. Si calcoli l'integrale di linea

$$\int_\gamma |xy|\, ds,$$

dove

$$\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)^T \qquad \text{con } t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right].$$

RISULTATO

$$\frac{2}{9}\left(8 - \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\int_\gamma |xy|\, ds = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |2\cos t\ \sin t|\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos t\ \sin t\sqrt{1 + 3\sin^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos t \sin t\sqrt{1 + 3\sin^2 t}\, dt = \frac{1}{3}\int_{1+\frac{3}{4}}^{4} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{7}{4}}^{4} = \frac{2}{9}\left(8 - \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$