Università di Trieste - Facoltà d'Ingegneria
Corsi di Studi in Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio, Civile, Elettrica, Elettronica, Gestionale, Informatica, delle Telecomunicazioni

Programma di Analisi Matematica 2 - A.A. 2001-2002
Prof. Pierpaolo Omari

Serie numeriche Motivazioni ed esempi. Serie di numeri reali. Termine generale e ridotte. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. La serie geometrica e suo carattere (con dim.). Condizione necessaria per la convergenza: il termine generale dev'essere infinitesimo (con dim.). Relazioni tra serie e integrali generalizzati (con dim.). Serie a termini positivi. Aut-aut per le serie a termini positivi (con dim.). Criterio del confronto (con dim.). Criterio dell'ordine d'infinitesimo (con dim.). Serie armonica generalizzata e suo carattere (con dim.). Criterio del rapporto (con dim.). Criterio del rapporto con il limite (con dim.). Criterio della radice. Criterio della radice con il limite. Serie con i termini di segno misto. Serie assolutamente e semplicemente convergenti. La convergenza assoluta implica la convergenza. Serie con i termini di segno alternato. Criterio di Leibniz (con dim.). Operazioni con le serie : somma e prodotto per una costante. Convergenza di una successione di numeri complessi. Serie di numeri complessi. Serie assolutamente e semplicemente convergenti. La convergenza assoluta implica la convergenza.

Successioni e serie di funzioni Motivazioni ed esempi. Il problema della sviluppabilità in serie di Taylor e di Fourier. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale di una successione di funzioni. Convergenza uniforme di una successione di funzioni. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di derivata e di integrale. Serie di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme. Serie di potenze in $\mathbb{R}$. Esempi preliminari. Lemma di Abel (con dim.). Insieme di convergenza. Raggio di convergenza. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza (con dim.). Intervallo di convergenza. Esempi. Proprietà della funzione somma. Teorema di derivazione. Teorema di integrazione. Conseguenze e applicazioni. Sviluppabilità in serie di Taylor in $\mathbb{R}$. La somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor. Una funzione di classe C^∞ in generale non è sviluppabile in serie di Taylor. Condizioni sulle derivate per la sviluppabilità in serie di Taylor in $\mathbb{R}$ (con dim.). Funzioni analitiche in $\mathbb{R}$. Sviluppo in serie di Taylor-Mclaurin delle principali funzioni elementari: $e^x, \sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x, \log x, \mathrm{arctg} x, (1+x)^\alpha$. Funzioni complesse di variabile complesssa. Limiti, continuità e derivabilità. Regole algebriche di derivazione. Esempi di funzioni derivabili e non derivabili in senso complesso. Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Esempi preliminari. Lemma di Abel. Insieme di convergenza. Raggio di convergenza. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza. Cerchio di convergenza. Esempi. Proprietà della funzione somma. Teorema di derivazione. Sviluppabilità in serie di Taylor in $\mathbb{C}$. La somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor. Funzioni analitiche in $\mathbb{C}$. Una funzione derivabile in senso complesso (cioè olomorfa) è analitica. Funzioni elementari in $\mathbb{C}$: $\exp z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$. Proprietà di $\exp z$: $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$, formule di Eulero (con dim.), periodicità . Derivate di $\exp z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$. L'equazione esponenziale in $\mathbb{C}$. Il logaritmo complesso.

Lo spazio $\mathbb{R}^N$ Struttura metrica di $\mathbb{R}^N$. La distanza euclidea in $\mathbb{R}^N$. Proprietà della distanza. Sfere aperte e chiuse. Intorni. Proprietà degli intorni. Punti di accumulazione, punti interni e punti di frontiera. Chiusura di un insieme e insiemi chiusi. Interno di un insieme e insiemi aperti. Frontiera di un insieme. Insiemi limitati. Funzioni da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$. Campi scalari. Insiemi di livello. Curve parametriche. Superfici parametriche. Campi vettoriali. Limiti e continuità di funzioni da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$. Teorema di Weierstrass. Insiemi connessi per archi. Teorema di connessione. Teorema degli zeri. Struttura lineare di $\mathbb{R}^N$. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. Proprietà del prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (con dim.). Norma euclidea in $\mathbb{R}^N$. Proprietà della norma (con dim.). Coseno dell'angolo fra due vettori. Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$. Applicazioni lineari e matrici associate. Forme lineari. Teorema di Riesz in $\mathbb{R}^N$ (con dim.).

Integrale di Riemann in $\mathbb{R}^N$ Motivazioni. Rettangoli in $\mathbb{R}^2$. Decomposizioni. Ordinamento fra decomposizioni. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un rettangolo. Interpretazione geometrica. Formule di riduzione per gli integrali doppi. Teorema di Fubini. Parallelepipedi rettangoli in $\mathbb{R}^3$. Decomposizioni. Ordinamento fra decomposizioni. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un parallelepipedo. Formule di riduzione per gli integrali tripli: per corde e per sezioni. Teorema di Fubini. $N-$rettangoli in $\mathbb{R}^N$. Somme di Riemann e relazione con l'integrale. Applicazioni al calcolo di masse, momenti d'inerzia, potenziali gravitazionali. Una condizione sufficiente per l'integrabilità su un rettangolo: la continuità. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, teorema del valore assoluto, integrabilità del prodotto, teorema della media, integrabilità della restrizione, additività rispetto al dominio. Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. Insiemi trascurabili e relative proprietà. Il grafico di una funzione integrabile su un rettangolo è trascurabile (con dim.). Una condizione sufficiente per l'integrabilità su un rettangolo: la continuità a meno di un insieme trascurabile. Una condizione sufficiente per l'integrabilità su un insieme limitato (con dim.). Misura secondo Peano-Jordan. Insiemi misurabili. Proprietà della misura. Una funzione continua su insieme chiuso e misurabile è integrabile. Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile (con dim.). Formula di riduzione per gli integrali doppi su insiemi normali (con dim.). Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile. Formula di riduzione per gli integrali tripli su insiemi normali (riduzione per corde). Formula di riduzione per sezioni per gli integrali tripli. Cambio di variabili negli integrali : esame del caso unidimensionale. Cambiamento di variabili negli integrali doppi. Trasformazione lineare di coordinate. Coordinate polari ed ellittiche in $\mathbb{R}^2$. Cambiamento di variabili negli integrali tripli. Trasformazione lineare di coordinate. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Integrali generalizzati in $\mathbb{R}^N$. Insiemi localmente misurabili e funzioni localmente integrabili. Integrale generalizzato di una funzione di segno costante. Indipendenza dalla particolare successione invadente.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$ Motivazioni. Derivate direzionali e parziali per campi scalari e vettoriali. Esempi di funzioni discontinue in un punto dotate di derivate direzionali in quel punto. Differenziale di un campo scalare. Approssimante lineare. Piano tangente e sua equazione. La differenziabilità implica la continuità (con dim.). La differenziabilità implica l'esistenza di tutte le derivate direzionali (con dim.). Rappresentazione del differenziale. Matrice Jacobiana. Gradiente. Proprietà del gradiente: direzione orientata di massimo incremento e ortogonalità rispetto agli insiemi di livello. Una condizione sufficiente per la differenziabilità: teorema del differenziale totale (con dim.). Funzioni di classe C^1. Regole algebriche di differenziazione. Differenziale di un campo vettoriale. Un campo vettoriale è differenziabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti. Rappresentazione del differenziale. Matrice Jacobiana. Differenziazione della funzione composta. Casi particolari. Teorema del valor medio. Derivate direzionali e parziali di ordine superiore. Funzioni di classe C^k. Teorema di Schwarz. Forme lineari e quadratiche. Differenziale secondo di un campo scalare. Matrice Hessiana. Teorema di Young (sulla simmetria della matrice Hessiana). Condizione sufficiente affinchè una funzione sia due volte differenziabile. Formula di Taylor del secondo ordine. Estremi relativi e assoluti di un funzionale. Test delle derivate prime (o del gradiente) per i punti di estremo (con dim.). Punti di sella. Test delle derivate seconde (o della matrice Hessiana) per i punti di estremo (con dim.). Vincoli. Punti di estremo vincolato. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$ (curve) e in $\mathbb{R}^3$ (superfici e curve). Interpretazione geometrica.

Equazioni differenziali Modelli matematici ed equazioni differenziali. Equazioni differenziali ordinarie (EDO) e alle derivate parziali (EDP). Ordine di un'equazione differenziale. EDO scalari del primo ordine (in forma normale). Definizione di soluzione. Campo vettoriale associato ad un'EDO del primo ordine, curve associate alle soluzioni e relative proprietà. Problema di Cauchy (o ai valori iniziali). Soluzione di un problema di Cauchy. Teorema di esistenza locale (di Peano). Esempi di non esistenza golbale. Esempi di non unicità. Teorema di esistenza e unicità locale (di Cauchy). Equazioni con variabili separate: metodo risolutivo (con dim.). Equazioni nonlineari ed equazioni linearizzate: metodo di linearizzazione. Confronto fra le rispettive soluzioni (con dim.). EDO del primo ordine scalari omogenee e non omogenee (o complete). Applicazione lineare associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea (con dim.). Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa (con dim.). Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo della variazione delle costanti (con dim.). Principio di sovrapposizione (con dim.). Sistemi di EDO lineari del primo ordine di dimensione N: omogenei e non omogenei (o completi). Applicazione lineare associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogeneo. Struttura dell'insieme delle soluzioni del completo. Determinazione di una soluzione particolare del completo. L'equazioni di Bernoulli: metodo risolutivo. EDO scalari del secondo ordine (in forma normale). Definizione di soluzione. Problema di Cauchy (o ai valori iniziali). Teorema di esistenza e unicità locale. Equazioni di Newton autonome e conservative: risoluzione con il metodo dell'energia. EDO lineari del secondo ordine scalari con coefficienti costanti omogenee e non omogenee (o complete). Applicazione lineare associata. Equazione caratteristica. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea e determinazione di una base (cenno di dim.). Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa. Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo del nucleo risolvente. Applicazione ad alcuni sistemi fisici: circuiti elettrici (RCL) e vibrazioni meccaniche lineari. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. EDO lineari di ordine N scalari con coefficienti costanti omogenee e non omogenee (o complete). Equazione caratteristica. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea e determinazione di una base. Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa. Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo del nucleo risolvente. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. Equazioni di Eulero. Sistemi di EDO lineari del primo ordine di dimensione 2: risoluzione per mezzo di una riduzione ad un'equazione del secondo ordine.

Curve in forma parametrica Curve in forma parametrica in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$: parametrizzazione e sostegno. Curve continue e di classe C^k. Curve regolari: vettore tangente. Curve chiuse. Curve semplici. Retta tangente ad una curva regolare semplice. Curve in forma cartesiana e in forma polare. Cenno all'orientazione di una curva. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Rettificabilità di una curva di classe C^1 (con dim.). Integrale curvilineo di un campo scalare. Applicazione al calcolo di masse, baricentri e momenti d'inerzia. Interpretazione geometrica. Integrale curvilineo di un campo vettoriale. Interpretazione meccanica. Campi vettoriali conservativi. Calcolo dell'integrale curvilineo di un campo vettoriale conservativo: generalizzazione del teorema di Torricelli (con dim.).

Esercitazioni Si svolgono su tutti gli argomenti del corso, con particolare riguardo a: serie numeriche, serie di potenze, integrali doppi e tripli, estremi liberi e vincolati, equazioni differenziali, curve in forma parametrica.

BIBLIOGRAFIA

- Dispense disponibili in rete.
- M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Matematica, Calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli, Bologna, 2000.
- R.A. Adams, Calcolo differenziale 1 e 2, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1992.