Analisi Matematica 1: VI prova intermedia

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2001–2002

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ____ **Laurea in Ingegneria** ______________________ **VOTO** ______

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} (e^{4t^2} + 4t^2)\, dt.$$

(i) Si calcolino

• $f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + x^2)$

• $f''(x) = x(e^{x^2} + 1)$

• $f'''(x) = e^{x^2}(1 + 2x^2) + 1$

(ii) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 di f di punto iniziale $x_0 = 0$:

$$p_{3,0}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3$$

(iii) Si determini $\mathrm{ord}_0 f$:

$$\mathrm{ord}_0 f = 1$$

(iv) Si studi la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di f.

Si ha:

• $f''(x) < 0$ se $x < 0$;

• $f''(x) > 0$ se $x > 0$;

• $f''(0) = 0$.

Quindi risulta:

• f è concava su $]-\infty, 0[$;

• f è convessa su $]0, +\infty[$;

• 0 è punto di flesso ascendente.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione razionale

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+4)\,(x-2)}.$$

(i) Si decomponga f con il metodo di Hermite.

Le radici del polinomio a denominatore sono $2, -2i, 2i$, ognuna avente molteplicità 1. Pertanto si ha:

$$\frac{x+1}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$x+1 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-2) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$x+1 = (A+B)x^2 + (C-2B)x + (4A-2C) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2B=1 \\ 4A-2C=1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{3}{8} \\ B = -\frac{3}{8} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Quindi risulta:

$$f(x) = \frac{\frac{3}{8}}{x-2} + \frac{-\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2+4}.$$

(ii) Si determini una primitiva di f su $]2,+\infty[$.

L'insieme delle primitive di f su $]2,+\infty[$ è dato da:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4)(x-2)}dx = \frac{3}{8}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{3}{16}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{8}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{8}\log(x-2) - \frac{3}{16}\log(x^2+4) + \frac{1}{8}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.