**Analisi Matematica 1: II prova intermedia**

**Corso:** **OMARI** ◯ **TIRONI** ◯

**A.a. 2001–2002**

**COGNOME e NOME** ____________________ **N. Matricola** ________

**Anno di Corso** ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________ **VOTO** ________

**ESERCIZIO N. 1.** Si dimostri, applicando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n-\pi}-\pi}{e^n+\pi} = e^{-\pi}.$$

**DEFINIZIONE DI LIMITE**

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\bar{n} \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n > \bar{n} \Longrightarrow \left|\frac{e^{n-\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^{-\pi}\right| < \varepsilon\right)$$

**DIMOSTRAZIONE**

Fissato $\varepsilon > 0$, si cerca $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{e^{n-\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^{-\pi}\right| < \varepsilon.$$

Poiché

$$\left|\frac{e^{n-\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^{-\pi}\right| = \frac{\pi(1+e^{-\pi})}{e^n+\pi} \le \frac{\pi(1+e^{-\pi})}{e^n},$$

basta prendere

$$\bar{n} > \log\frac{\pi(1+e^{-\pi})}{\varepsilon}.$$

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \text{ arcsen } (1 - \log(1-x)) .$$

• Si determini il dominio di $f$.

**RISULTATO**

$$\text{dom} f = [1 - e^2, 0]$$

**SVOLGIMENTO**

Si ha

$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ -1 \le 1 - \log(1-x) \le 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -2 \le -\log(1-x) \le 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 \le 1 - x \le e^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 - e^2 \le x \le 0. \end{cases}$$

• Si provi che $f$ è una funzione crescente.

**SVOLGIMENTO**

Per ogni $x_1, x_2 \in \text{dom} f$, si ha

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log(1 - x_1) > \log(1 - x_2) \Longrightarrow 1 - \log(1 - x_1) < 1 - \log(1 - x_2)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi} \text{ arcsen } (1 - \log(x_1 - 1)) < \frac{1}{\pi} \text{ arcsen } (1 - \log(x_2 - 1)) .$$

• Si determini l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette una soluzione $x \in \text{dom} f$.

**RISULTATO**

$$\text{im} f = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

**SVOLGIMENTO**

Si ha

$$f(x) = y \Longleftrightarrow \text{ arcsen } (1 - \log(1 - x)) = \pi y$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \pi y \le \frac{\pi}{2} \\ 1 - \log(1 - x) = \text{ sen}(\pi y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2} \\ x = 1 - \exp(1 - \text{ sen}(\pi y)) \end{cases}$$