Analisi Matematica 1: II prova intermedia
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001–2002

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________ **VOTO** ________

ESERCIZIO N. 1. Si dimostri, applicando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^{n-e}-e}{\pi^n+e} = \pi^{-e}.$$

DEFINIZIONE DI LIMITE

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\bar n\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\left(n>\bar n \Longrightarrow \left|\frac{\pi^{n-e}-e}{\pi^n+e}-\pi^{-e}\right|<\varepsilon\right)$$

DIMOSTRAZIONE

Fissato $\varepsilon>0$, si cerca $\bar n$ tale che per ogni $n>\bar n$ si abbia

$$\left|\frac{\pi^{n-e}-e}{\pi^n+e}-\pi^{-e}\right|<\varepsilon.$$

Poiché

$$\left|\frac{\pi^{n-e}-e}{\pi^n+e}-\pi^{-e}\right| = \frac{e(1+\pi^{-e})}{\pi^n+e} \le \frac{e(1+\pi^{-e})}{\pi^n},$$

basta prendere

$$\bar n > \log_\pi \frac{e(1+\pi^{-e})}{\varepsilon}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = 2 \text{ arcsen } (1 + \log(1 - x)) .$$

• Si determini il dominio di f.

RISULTATO

$$\text{dom} f = [0, 1 - e^{-2}]$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ -1 \leq 1 + \log(1 - x) \leq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -2 \leq \log(1 - x) \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ e^{-2} \leq 1 - x \leq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - e^{-2}. \end{cases}$$

• Si provi che f è una funzione decrescente.

SVOLGIMENTO

Per ogni $x_1, x_2 \in \text{dom} f$, si ha

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Longrightarrow 1 + \log(1 - x_1) > 1 + \log(1 - x_2)$$

$$\Longrightarrow 2 \text{ arcsen } (1 + \log(1 - x_1)) > 2 \text{ arcsen } (1 + \log(1 - x_2)) .$$

• Si determini l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette una soluzione $x \in \text{dom} f$.

RISULTATO

$$\text{im} f = [-\pi, \pi]$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$f(x) = y \Longleftrightarrow \text{ arcsen } (1 + \log(1 - x)) = \frac{y}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 + \log(1 - x) = \text{ sen}(\frac{y}{2}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\pi \leq y \leq \pi \\ x = 1 - \exp(\text{ sen}(\frac{y}{2}) - 1) \end{cases}$$