Analisi Matematica 1: II prova intermedia
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001–2002

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ____ **Laurea in Ingegneria** ______________________ **VOTO** ______

ESERCIZIO N. 1. Si dimostri, applicando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^{n+e}-e}{\pi^n+e} = \pi^e.$$

DEFINIZIONE DI LIMITE

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\bar{n}\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\left(n>\bar{n}\Longrightarrow\left|\frac{\pi^{n+e}-e}{\pi^n+e}-\pi^e\right|<\varepsilon\right)$$

DIMOSTRAZIONE

Fissato $\varepsilon>0$, si cerca $\bar{n}$ tale che per ogni $n>\bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{\pi^{n+e}-e}{\pi^n+e}-\pi^e\right|<\varepsilon.$$

Poiché

$$\left|\frac{\pi^{n+e}-e}{\pi^n+e}-\pi^e\right| = \frac{e(1+\pi^e)}{\pi^n+e} \le \frac{e(1+\pi^e)}{\pi^n},$$

basta prendere

$$\bar{n} > \log_\pi \frac{e(1+\pi^e)}{\varepsilon}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \text{ arcsen } (1 - \log(x+1))\,.$$

• Si determini il dominio di f.

RISULTATO

$$\text{dom} f = [0, e^2 - 1]$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ -1 \leq 1 - \log(x+1) \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ -2 \leq -\log(x+1) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ 1 \leq x+1 \leq e^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ 0 \leq x \leq e^2 - 1. \end{cases}$$

• Si provi che f è una funzione decrescente.

SVOLGIMENTO

Per ogni $x_1, x_2 \in \text{dom} f$, si ha

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log(x_1+1) < \log(x_2+1) \Longrightarrow 1 - \log(x_1+1) > 1 - \log(x_2+1)$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{\pi} \text{ arcsen } (1 - \log(x_1+1)) > \frac{2}{\pi} \text{ arcsen } (1 - \log(x_2+1))\,.$$

• Si determini l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette una soluzione $x \in \text{dom}\, f$.

RISULTATO

$$\text{im} f = [-1, 1]$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$f(x) = y \iff \text{ arcsen } (1 - \log(x+1)) = \frac{\pi}{2} y$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} y \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 - \log(x+1) = \text{ sen}(\frac{\pi}{2} y) \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ x = -1 + \exp(1 - \text{ sen}(\frac{\pi}{2} y)) \end{cases}$$