Analisi Matematica 1: II prova intermedia

Corso: **OMARI** ◯ **TIRONI** ◯

A.a. 2001–2002

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________ **VOTO** ______

ESERCIZIO N. 1. Si dimostri, applicando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} = e^\pi.$$

DEFINIZIONE DI LIMITE

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n} \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n > \bar{n} \Longrightarrow \left|\frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^\pi\right| < \varepsilon\right)$$

DIMOSTRAZIONE

Fissato $\varepsilon > 0$, si cerca $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^\pi\right| < \varepsilon.$$

Poiché

$$\left|\frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^\pi\right| = \frac{\pi(1+e^\pi)}{e^n+\pi} \leq \frac{\pi(1+e^\pi)}{e^n},$$

basta prendere

$$\bar{n} > \log \frac{\pi(1+e^\pi)}{\varepsilon}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = 4 \text{ arcsen } (1 - \log(x-1)) .$$

• Si determini il dominio di f.

RISULTATO

$$\text{dom} f = [2, e^2 + 1]$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ -1 \le 1 - \log(x-1) \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ -2 \le -\log(x-1) \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ 1 \le x - 1 \le e^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ 2 \le x \le e^2 + 1. \end{cases}$$

• Si provi che f è una funzione decrescente.

SVOLGIMENTO

Per ogni $x_1, x_2 \in \text{dom} f$, si ha

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log(x_1 - 1) < \log(x_2 - 1) \Longrightarrow 1 - \log(x_1 - 1) > 1 - \log(x_2 - 1)$$

$$\Longrightarrow 4 \text{ arcsen } (1 - \log(x_1 - 1)) > 4 \text{ arcsen } (1 - \log(x_2 - 1)) .$$

• Si determini l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette una soluzione $x \in \text{dom} f$.

RISULTATO

$$\text{im} f = [-2\pi, 2\pi]$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$f(x) = y \iff \text{ arcsen } (1 - \log(x-1)) = \frac{y}{4}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{4} \le \frac{\pi}{2} \\ 1 - \log(x-1) = \text{ sen}(\frac{y}{4}) \end{cases} \iff \begin{cases} -2\pi \le y \le 2\pi \\ x = 1 + \exp(1 - \text{ sen}(\frac{y}{4})) \end{cases}$$