Analisi Matematica 1: IV prova intermedia
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001–2002

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso _____ **Laurea in Ingegneria** ______________________ **VOTO** _______

ESERCIZIO N. 1. La tabella seguente riporta i valori in alcuni punti delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ e delle loro derivate $f'(x)$, $g'(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	4	1	4	-4
-2	0	-3	5	-2
-1	-2	4	6	0
0	1	-1	3	-1
1	-2	-3	-1	-4
2	0	-3	2	1
3	-4	-6	-2	4

(i) Si calcoli nel punto $x_0 = 1$ la derivata della funzione prodotto $f(x) \cdot g(x)$.
Si ha:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

e quindi

$$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = (-1)(-3) + (-2)(-4) = 11.$$

(ii) Si calcoli nel punto $x_0 = 0$ la derivata della funzione composta $f(g(x))$.
Si ha:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

e quindi

$$f'(g(0))g'(0) = f'(-1)(-1) = 6 \cdot (-1) = -6.$$

(iii) Si calcoli nel punto $x_0 = -1$ la derivata della funzione quoziente $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.
Si ha:

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

e quindi

$$\frac{g'(-1)f(-1) - g(-1)f'(-1)}{(f(-1))^2} = \frac{0 \cdot (-2) - 4 \cdot 6}{(-2)^2} = -6.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 + e^{-2x} - 2}{x}.$$

(i) Si determini il dominio di f.

$$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) Si calcolino:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(iii) Si provi che la funzione f ammette almeno due zeri.

Poichè f è continua su $]-\infty, 0[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, il teorema di esistenza degli zeri assicura l'esistenza di almeno un punto $x_1 \in]-\infty, 0[$ tale che $f(x_1) = 0$. Analogamente si prova l'esistenza di almeno un punto $x_2 \in]0, +\infty[$ tale che $f(x_2) = 0$.

(iv) Si determinino gli asintoti di f.

Poichè

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0,$$

f ha un solo asintoto obliquo, a $+\infty$, avente equazione $y = 2x$.

Inoltre, poichè

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty,$$

f ha un solo asintoto verticale, avente equazione $x = 0$.

(v) Si calcoli $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - e^{-2x}(2x+1)}{x^2}$$

(vi) Si determini l'approssimante lineare di f nel punto $x_0 = 1$.

Poichè $\overline{f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, $f'(x_0) = 4 - 3e^{-2}$ e $f(x_0) = e^{-2}$, si ha

$$\overline{f}(x) = (4 - 3e^{-2})(x - 1) + e^{-2}.$$