Analisi Matematica 1: III prova intermedia
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001–2002

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ____ **Laurea in Ingegneria** ______________________ **VOTO** ______

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi^{2x}-1}{3x}.$$

RISULTATO

$$\frac{2}{3}\log\pi$$

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi^{2x}-1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\log\pi.$$

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right).$$

RISULTATO

$$-\frac{1}{2}$$

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) = -\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

(i) Si calcolino:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = a^2 - 1$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(ii) Si determinino gli $a \in \mathbb{R}$ tali che f è continua in $x_0 = 0$.

RISULTATO

$$a = -1 \vee a = 1$$

SVOLGIMENTO Si ha che f è continua in $x_0 = 0$ se e solo se

$$0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = a^2 - 1,$$

cioè se e solo se

$$a^2 = 1.$$

(iii) Si determinino gli $a \in \mathbb{R}$ tali che f è continua e non negativa su $\mathbb{R}$.

RISULTATO

$$a = 1$$

SVOLGIMENTO Si ha che f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = -1$ o $a = 1$.
Se $a = 1$, allora $(x+1)^2 - 1 = x(x+2) < 0$ in $]-2, 0[$.
Se $a = -1$, allora

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) \geq 0 & \text{in }]-\infty, 0], \\ e^{-\frac{1}{x}} > 0 & \text{in }]0, +\infty[, \end{cases}$$

cioè f è non negativa su $\mathbb{R}$.