Analisi Matematica 1: V prova intermedia
Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯
A.a. 2001–2002

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ____ **Laurea in Ingegneria** ______________________ **VOTO** ______

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\log(1+x^3)}.$$

RISULTATO

$$-\frac{1}{3}$$

SVOLGIMENTO
Applicando la regola di de L'Hospital (caso $\frac{0}{0}$), si ha

$$\frac{x - \operatorname{tg} x}{\log(1+x^3)} \to -\frac{1}{3} \quad \Longleftarrow \quad \frac{1 - 1 - \operatorname{tg}^2 x}{\frac{3x^2}{1+x^3}} = -\frac{1+x^3}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cos^2 x \to -\frac{1}{3},$$

se $x \to 0$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{|x-1|}.$$

(i) Si determinino

- il dominio di f: dom $f = \mathbb{R}$
- i segni di f: $f(x) > 0$ se $x \neq 1$; $f(1) = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- gli asintoti di f: la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$
- $f'(x)$ se $x < 1$: $-e^{-x}\left(\sqrt{1-x} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)$
- $f'(1) = \infty$
- $f'(x)$ se $x > 1$: $\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x-1}}(3-2x)$
- i segni di f': $f'(x) < 0$ se $x < 1$; $f'(x) > 0$ se $1 < x < \frac{3}{2}$; $f'(\frac{3}{2}) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x > \frac{3}{2}$
- la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f: f è decrescente su $]\infty, 1[$; f è crescente su $]1, \frac{3}{2}[$; f è decrescente su $]\frac{3}{2}, +\infty[$; $\inf f = \min f = f(1) = 0$; $\sup f = +\infty$; $\frac{3}{2}$ è punto di massimo relativo con $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2e^3}}$

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in$ dom f dell'equazione $f(x) = t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < 0$: 0 soluzioni;
- $t = 0$: 1 soluzione;
- $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2e^3}}$: 3 soluzioni;
- $t = \frac{1}{\sqrt{2e^3}}$: 2 soluzioni;
- $t > \frac{1}{\sqrt{2e^3}}$: 1 soluzione;