Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2001-2002, sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** ________
Anno di Corso _____ **Laurea in Ingegneria** ____________________
Appello in cui si intende sostenere la prova di teoria : **II** ◯ **III** ◯ **VOTO** ______

ESERCIZIO N. 1. Si trovi la forma trigonometrica delle soluzioni dell'equazione

$$i \cdot z^3 = (\overline{z})^5 \ ,$$

dove $\overline{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

RISULTATO

$$0; \quad \left[1, -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}\right], \text{ con } k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$$

SVOLGIMENTO

Posto $z = [\varrho, \vartheta] = \varrho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$, con $\varrho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha

$$i \cdot z^3 = (\overline{z})^5 \iff \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \cdot \left[\varrho^3, 3\vartheta\right] = \left[\varrho^5, -5\vartheta\right] \iff \left[\varrho^3, 3\vartheta + \frac{\pi}{2}\right] = \left[\varrho^5, -5\vartheta\right] \iff$$

$$\begin{cases} \varrho^3 = \varrho^5 \\ 3\vartheta + \frac{\pi}{2} = -5\vartheta + 2k\pi \end{cases} \iff \varrho = 0 \quad \vee \quad \begin{cases} \varrho = 1 \\ \vartheta = -\frac{\pi}{16} + +k\frac{\pi}{4} \end{cases} ,$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO N. 2. Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$\frac{d^n}{d\,x^n}(x \cdot e^x) = (x+n) \cdot e^x \quad .$$

SVOLGIMENTO

Consideriamo il predicato p definito su $\mathbb{N}^+$ da $p(n) =$ "$\frac{d^n}{d\,x^n}(x \cdot e^x) = (x+n) \cdot e^x$". Si ha che

• $p(1) =$ "$\frac{d}{d\,x}(x \cdot e^x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$" 'e vera;

• se $p(n)$ è vera, allora $p(n+1) =$ "$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}(x \cdot e^x) = \frac{d}{d\,x}\left(\frac{d^n}{d\,x^n}(x \cdot e^x)\right) = \frac{d}{d\,x}\left((x+n) \cdot e^x\right) = e^x + (x+n) \cdot e^x = (x+n+1) \cdot e^x$" 'e vera.

Dunque il principio d'induzione assicura che $p(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si dimostri che l'equazione

$$\cos x - x^3 \arctan x = 0$$

ha almeno due soluzioni (di segno opposto).

SVOLGIMENTO

Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = \cos x - x^3 \arctan x$. Si ha che

- f è continua,
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
- $f(0) = 1$,
- f è pari.

Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, esiste $b > 0$ tale che $f(b) < 0$. Il teorema degli zeri, applicato sull'intervallo $[0, b]$ alla funzione continua f, assicura l'esistenza di $c > 0$ tale che $f(c) = 0$. Infine, essendo f pari, risulta anche $f(-c) = 0$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = |x| \cdot 2^x \, .$$

(i) Si determinino:

- il dominio e i segni di f :

dom $f = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ se $x \neq 0$; $f(0) = 0$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- $$f'(x) = \begin{cases} -2^x(1 + x \log x) & \text{se } x < 0 \\ 2^x(1 + x \log x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

- i segni di f':

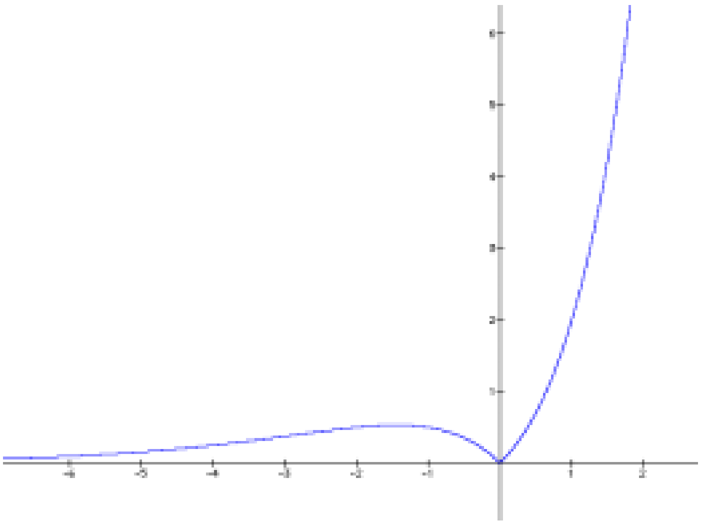
$f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -1/\log 2[\, \cup \,]0, +\infty[$; $f'(-1/\log 2) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-1/\log 2, 0[$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

f è crescente su $]-\infty, -1/\log 2[$ e su $]0, +\infty[$; f è decrescente su $]-1/\log 2, 0[$ e su $]0, +\infty[$; $\min f = f(0) = 0$; $\sup f = +\infty$; $-1/\log 2$ è punto di massimo relativo, con $f(-1/\log 2) = \frac{1}{e \log 2}$

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < 0$: 0 soluzioni,
- $t = 0$: 1 soluzione,
- $0 < t < f(-1/\log 2)$: 3 soluzioni,
- $t = f(-1/\log 2)$: 2 soluzioni,
- $t > f(-1/\log 2)$: 1 soluzione



COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

(i) Si determini una primitiva di $f(x)$ su $[0, 1]$.

Dividendo x^3 per $x^2 - 2$, si ottiene $x^3 = (x^2 - 2)\ x + 2x$. Quindi, l'insieme delle primitive di f su $[0, 1]$ è dato da

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 2}\ dx = \int x\ dx + \int \frac{2x}{x^2 - 2}\ dx = \frac{x^2}{2} + \log|x^2 - 2| + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Si calcoli $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Si ha

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} + \log|x^2 - 2|\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \log 2.$$

ESERCIZIO N. 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{t}{t+e^t}\,dt$$

sull'intervallo $[0, +\infty[$.

(i) Si calcolino:

- $f'(x) = \dfrac{4x}{2x + e^{2x}}$

- $f''(x) = \dfrac{4e^{2x}(1-2x)}{(2x+e^{2x})^2}$

(ii) Si studino la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di f su $[0, +\infty[$.

Si ha

- $f''(x) > 0$ se $x \in [0, 1/2[$,
- $f''(1/2) = 0$,
- $f''(x) < 0$ se $x \in]1/2, +\infty[$.

Quindi f è convessa su $[0, 1/2[$, è concava su $]1/2, +\infty[$ e $1/2$ è punto di flesso discendente.