Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

A.a. 2001-2002, sessione autunnale

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

Si risolvano gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○

ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(z + \bar{z})|z| = z\bar{z},$$

dove $\bar{z}$ e $|z|$ indicano, rispettivamente, il coniugato e il modulo del numero complesso z.

RISULTATO

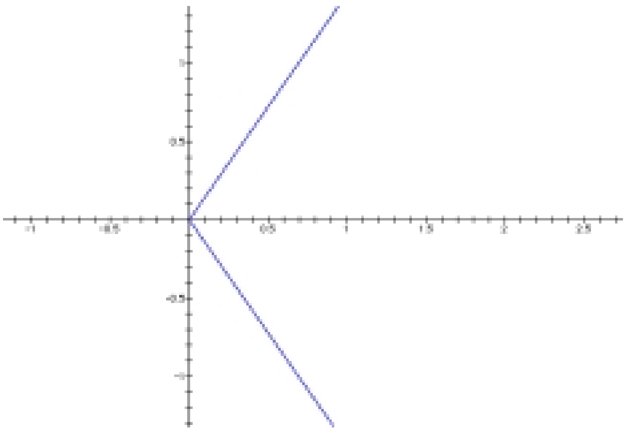
$$E = \left\{x + iy \mid y = \sqrt{3}x,\ x \geq 0\right\} \cup \left\{x + iy \mid y = -\sqrt{3}x,\ x \geq 0\right\}$$

SVOLGIMENTO

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$(z + \bar{z})|z| = z\bar{z} \iff 2x\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \iff 2x = \sqrt{x^2 + y^2} \iff$$

$$\begin{cases} 4x^2 = x^2 + y^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 3x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| = \sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}.$$



ESERCIZIO N. 2. Si consideri l'insieme di numeri reali

$$E = \{r + s : r, s \in \mathbb{Q} \cap \,]0, 1[\ \},$$

dove $\mathbb{Q}$ indica l'insieme dei numeri razionali.

Si determinino :

- $\inf E = 0 \notin E$
- $\sup E = 2 \notin E$
- l'insieme dei punti di accumulazione di E : $[0, 2]$
- l'insieme dei punti isolati di E : $\emptyset$
- l'insieme dei punti interni di E : $\emptyset$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli, usando i limiti notevoli,

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

RISULTATO

$$e^2$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x}}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\frac{x^2}{1-\cos x} = 2,$$

si conclude che

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^2.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \sqrt[3]{1+x}.$$

(i) Si determinino:

• il dominio e i segni di f :

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ se $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$; $f(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -1[$; $f(-1) = f(0) = 0$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• $f'(x) = \frac{x}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}(7x+6)$ se $x \neq -1$

• $f'(-1) = +\infty$

• i punti di annullamento e i segni di f':

$f'(-\frac{6}{7}) = f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -\frac{6}{7}[\cup]0, +\infty[$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-\frac{6}{7}, 0[$

• la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

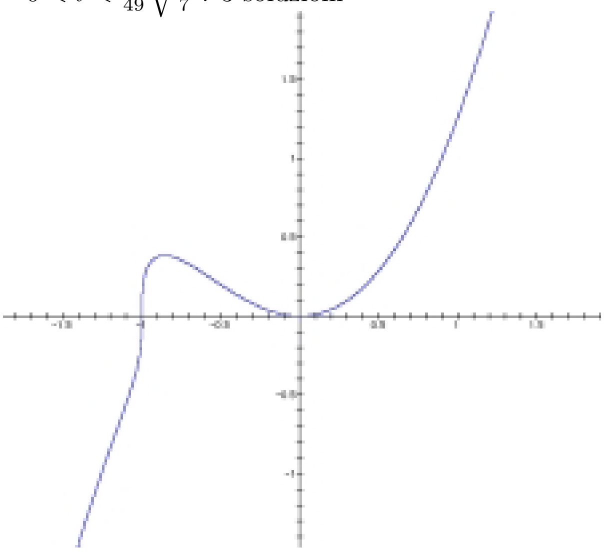
f è crescente su $]-\infty, -\frac{6}{7}[$ e su $]0, +\infty[$; f è decrescente su $]-\frac{6}{7}, 0[$; $\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$; $-\frac{6}{7}$ è punto di massimo relativo, con $f(-\frac{6}{7}) = \frac{36}{49}\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$; 0 è punto di minimo relativo, con $f(0) = 0$

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

• $t < 0 \vee t > \frac{36}{49}\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$: 1 soluzione,

• $t = 0 \vee t = \frac{36}{49}\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$: 2 soluzioni,

• $0 < t < \frac{36}{49}\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$: 3 soluzioni



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 5. Si determini una primitiva della funzione

$$f(x) = \int_1^x \log t \, dt.$$

RISULTATO

$$\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{3}{4}x^2 + x$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$f(x) = \int_1^x \log t \; dt = [t \log t]_1^x - \int_1^x 1 \; dt = x \log x - x + 1$$

e quindi

$$\int f(x) \; dx = \int (x \log x - x + 1) \; dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x \; dx - \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{3}{4}x^2 + x + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \cos(t^2)\, dt.$$

(i) Si provi che f è dispari:

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(-x) = \int_{x}^{-x} \cos(t^2)\, dt = -\int_{-x}^{x} \cos(t^2)\, dt = -f(x).$$

(ii) Si determinino:

- $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos(t^2)\, dt - \int_0^{-x} \cos(t^2)\, dt\right) = \cos(x^2) + \cos(x^2) = 2\cos(x^2)$

- $f''(x) = -4x\sin(x^2)$

(iii) Si determinino i punti di flesso di f nell'intervallo $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$.

Poiché $\sin(x^2) > 0$ se $x \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \setminus \{0\}$, si ha $f''(x) > 0$ se $x \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0[$ e $f''(x) < 0$ se $x \in]0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$. Essendo inoltre $f''(0) = 0$, si conclude che 0 è punto di flesso discendente.