Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2001-2002, sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Appello in cui si intende sostenere la prova di teoria : I ◯ II ◯ III ◯

ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$|\,|z-i\,|-i\,| \leq \sqrt{2},$$

dove $|w|$ indica il modulo del numero complesso w.

RISULTATO

$$S = \left\{x+iy : x^2+(y-1)^2 \leq 1\right\} \qquad \text{(cerchio di centro } (0,1) \text{ e raggio } 1)$$

SVOLGIMENTO

Posto $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$|\,|z-i\,|-i\,| \leq \sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$|\sqrt{x^2+(y-1)^2}-i\,| \leq \sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2+1} \leq \sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$x^2+(y-1)^2 \leq 1.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri l'insieme di numeri reali

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \ \text{ oppure } \ \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si determinino :

- $\inf E = 0$ $(= \min E)$
- $\sup E = +\infty$
- i punti di accumulazione di E : 0 e $+\infty$
- $\inf (\mathcal{C}E) = -\infty$
- $\sup (\mathcal{C}E) = +\infty$

NB: $\mathcal{C}E$ indica il complementare di E in $\mathbb{R}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli, utilizzando i limiti notevoli,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right)^{2x+3}.$$

RISULTATO

$$e^2$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right)^{2x+3} = \left(1+\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{2x+3} = \left[\left(1+\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+1}}\right]^{\frac{(x+1)(2x+3)}{x^2+1}} \quad\to\quad e^2,$$

se $x\to+\infty$.

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 \log(x^\pi)\,.$$

(i) Si determinino:

- il dominio e i segni di f :

$$\text{dom } f =]0, +\infty[;$$

$$f(x) < 0 \iff 0 < x < 1,\ f(1) = 0,\ f(x) > 0 \iff x > 1$$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \pi x^2(3\log x + 1)$
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$
- i punti di annullamento e i segni di f':

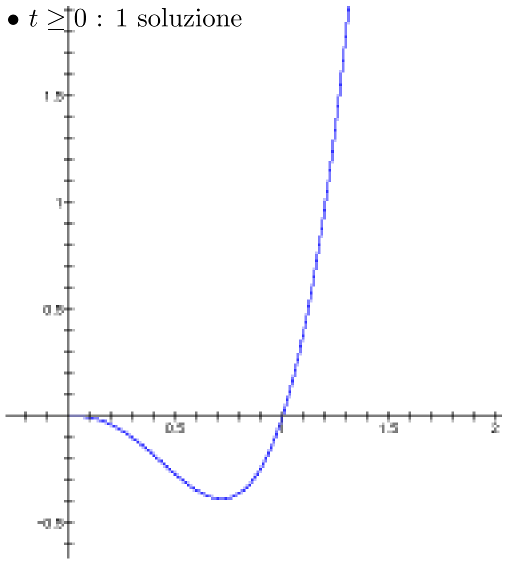
$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{e}},\ f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = 0,\ f'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

f è decrescente su $]0, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}[$, f è crescente su $]\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, +\infty[$, $\min f = \frac{-\pi}{3e}$, $\sup f = +\infty$.

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \text{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < \frac{-\pi}{3e}$: 0 soluzioni,
- $t = \frac{-\pi}{3e}$: 1 soluzione,
- $\frac{-\pi}{3e} < t < 0$: 2 soluzioni,
- $t \geq 0$: 1 soluzione



COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si determini una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

RISULTATO

$$\frac{1}{2}\text{arctg}x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

SVOLGIMENTO

Le radici del polinomio a denominatore sono i e $-i$, ognuna avente molteplicità 2. Pertanto si ha

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1)-2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$1 = (Ax+B)(x^2+1) + C(x^2+1) - 2x(Cx+D) \quad \Longleftrightarrow$$

$$1 = Ax^3 + (B-C)x^2 - 2Dx + (A+B+C) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B - C = 0 \\ -2D = 0 \\ A+B+C = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \\ D = 0 \end{cases}.$$

Quindi risulta

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1}\right).$$

L'insieme delle primitive di f su $\mathbb{R}$ è dato da

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\text{arctg}x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{2x} \sin(t^2)\, dt.$$

(i) Si calcolino:

- $f'(x) = 2\sin(4x^2)$
- $f''(x) = 16x\cos(4x^2)$
- $f'''(x) = 16\cos(4x^2) - 128\, x^2 \sin(4x^2)$.

(ii) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 di f di punto iniziale $x_0 = 0$.

Poiché $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 16$, si ha

$$p_{3,0}(x) = \frac{8}{3}x^3.$$

(iii) Si determini $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3}$.

Si ha, per la formula di Taylor-Peano,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{p_{3,0}(x) + \varepsilon(x)x^3}{x^3} = \frac{8}{3} + \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = \frac{8}{3}.$$