Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2001-2002, sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si determini la parte reale del numero complesso

$$(1+i)^{2002}.$$

RISULTATO

$$\Re e\,(1+i)^{2002} = 0$$

SVOLGIMENTO

Poiché la forma polare di $1+i$ è $[\sqrt{2},\, \pi/4]$, segue dalla formula di De Moivre

$$(1+i)^{2002} = [(\sqrt{2})^{2002}, 2002\,\frac{\pi}{4}] = [2^{1001}, 1001\,\frac{\pi}{2}],$$

cioè

$$(1+i)^{2002} = 2^{1001}\left(\cos\left(1001\,\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(1001\,\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Quindi risulta

$$\Re e\,(1+i)^{2002} = 0.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri l'insieme di numeri reali

$$E = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \mathbb{Z},$$

dove $\mathbb{Z}$ indica l'insieme dei numeri interi relativi.

Si determinino :

- $\inf E = -\infty$
- $\sup E = +\infty$
- i punti di accumulazione di E : $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \{-\infty, +\infty\}$
- i punti isolati di E : $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- i punti interni di E : $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli, utilizzando i limiti notevoli,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \log(1 + 2 \text{ tg } x)}{1 - \cos x}.$$

RISULTATO

4

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\frac{x \cdot \log(1 + 2 \text{ tg } x)}{1 - \cos x} = \frac{\log(1 + 2 \text{ tg } x)}{2 \text{ tg } x} \cdot \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \cos x} \cdot x =$$

$$\frac{\log(1 + 2 \text{ tg } x)}{2 \text{ tg } x} \cdot \frac{2 \text{ tg } x}{x} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} \to 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4,$$

se $x \to 0$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri, **sull'intervallo** $\left[\frac{1}{2e}, e\right]$, la funzione

$$f(x) = x \cdot |\log x|\,.$$

(i) Si determinino:

- i segni di f :

$f(x) > 0$ se $x \in [\frac{1}{2e}, e] \setminus \{1\}$; $f(1) = 0$

- $f'(x) = \begin{cases} -(\log x + 1) & \text{se } x \in [\frac{1}{2e}, 1[\\ \log x + 1 & \text{se } x \in]1, e] \end{cases}$

- i punti di annullamento e i segni di f':

$f'(\frac{1}{e}) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x \in [\frac{1}{2e}, \frac{1}{e}[\cup]1, e]$; $f'(x) < 0$ se $x \in]\frac{1}{e}, 1[$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

f è decrescente su $]\frac{1}{e}, 1[$; f è crescente su $[\frac{1}{2e}, \frac{1}{e}[$ e su $]1, e]$; $\min f = f(1) = 0$; $\max f = f(e) = e$; $\frac{1}{2e}$ è punto di minimo relativo, con $f(\frac{1}{2e}) = \frac{1+\log 2}{2e}$; $\frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo, con $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$

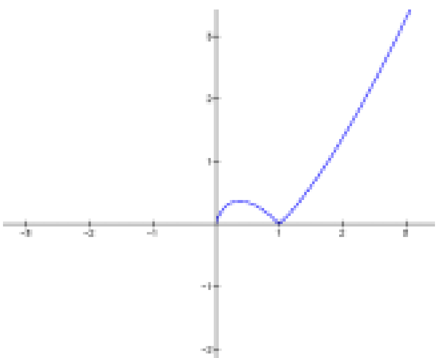
- $f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x \in [\frac{1}{2e}, 1[\\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in]1, e] \end{cases}$

- la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:

f è concava su $[\frac{1}{2e}, 1[$; f è convessa su $]1, e]$

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \left[\frac{1}{2e}, e\right]$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < 0$: 0 soluzioni,
- $t = 0$: 1 soluzione,
- $0 < t < f(\frac{1}{2e})$: 2 soluzioni,
- $f(\frac{1}{2e}) \leq t < f(\frac{1}{e})$: 3 soluzioni,
- $t = f(\frac{1}{e})$: 2 soluzioni,
- $f(\frac{1}{e}) < t \leq f(e)$: 1 soluzione,
- $t > f(e)$: 0 soluzioni



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 x\, e^t\, dt \right) dx.$$

RISULTATO

$$\frac{e}{2} - 1$$

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 x\ e^t\ dt \right) dx = \int_0^1 x \left[e^t \right]_x^1 dx = \int_0^1 x(e - e^x)\ dx =$$

$$\frac{e}{2} \left[x^2 \right]_0^1 - \left[x\ e^x \right]_0^1 + \int_0^1 e^x\ dx = \frac{e}{2} - 1.$$

ESERCIZIO N. 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{t}{t^2+1}\, dt.$$

(i) Si determinino:

- $f'(x) = \dfrac{2x^3}{x^4+1}$

- l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1(x-1) = x - 1$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Infatti si ha

$$\int_1^{x^2} \frac{t}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\left[\log(t^2+1)\right]_1^{x^2} = \frac{1}{2}\left(\log(x^4+1) - \log 2\right) \to +\infty$$

se $x \to +\infty$.