Università di Trieste - Facoltà d'Ingegneria

Corsi di Studi in Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio, Civile, Elettrica, Elettronica, Gestionale, Informatica, delle Telecomunicazioni

Programma di Analisi Matematica 1

Anno Accademico 2001-2002

Prof. Pierpaolo Omari

Insiemi numerici. I numeri reali. Proprietà algebriche dei numeri reali: **R** è un corpo commutativo. Proprietà d'ordine dei numeri reali: **R** è un corpo ordinato. L'insieme **N** dei numeri naturali. Principio d'induzione e applicazioni. Il fattoriale. La formula di Newton per lo sviluppo del binomio. L'insieme **Z** dei numeri interi relativi. L'insieme **Q** dei numeri razionali. La retta reale. Insufficienza dei numeri razionali. Proprietà di continuità dei numeri reali: classi separate e contigue e proprietà di Dedekind. Limitazioni inferiori e superiori. Massimo e minimo. Estremo superiore e inferiore e proprietà caratteristiche. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (con dim.). I simboli $+\infty$ e $-\infty$. Valore assoluto e sue proprietà. Intervalli in **R**. Approssimazione dei numeri reali mediante i numeri razionali. Densità di **Q** in **R**. Rappresentazione decimale dei numeri naturali, razionali e reali. La radice n-esima. I numeri complessi. **C** è un corpo commutativo. L'unità immaginaria. Forma algebrica (o di Eulero). Piano di Gauss. Teorema fondamentale dell'algebra. Modulo di un numero complesso e sue proprietà. Coniugio in **C** e relative proprietà. Forma trigonometrica (o polare) di un numero complesso. Argomento di un numero complesso. Formula del prodotto e formula di De Moivre. L'equazione $z^n = w$ in **C**.

Funzioni da R in R. Definizione di funzione. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Funzione inversa. Restrizione e prolungamento. Composizione di funzioni. Somma, prodotto, combinazione lineare di funzioni. Reciproca di una funzione. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni monotone. Potenza con esponente naturale, intero, razionale e reale. Proprietà formali. Funzioni elementari. Funzioni razionali. Polinomi. Principio d'identità dei polinomi. Grado di un polinomio. Fattorizzazione di un polinomio avente coefficienti reali. La funzione radice n-esima. La funzione esponenziale e relative proprietà (con dim.). Definizione del numero di Nepero (con dim.). La funzione logaritmo e relative proprietà (con dim.). La funzione potenza e relative proprietà. Successioni. Successioni definite per ricorrenza.

Limiti di funzioni da R in R. Studio del comportamento asintotico di una successione di numeri reali. Definizione di limite finito e infinito di una successione. Unicità del limite di una successione. Intorni e loro proprietà. Punti di accumulazione e punti isolati. Studio del comportamento locale di una funzione. Definizione generale di limite per una funzione. Esame dei casi particolari. Teorema di unicità del limite (con dim.). Limite della restrizione. Non esistenza del limite. Limite sinistro e destro. Limite della funzione composta (con dim.). Limite della somma e del prodotto (con dim.). Permanenza del segno (nel caso del limite) (con dim.). Limite della reciproca (con dim.). Teorema del confronto (o dei due carabinieri) (con dim.). Limite di sin x / x per x tendente a 0 (con dim.) e conseguenze. Limiti di funzioni razionali per x tendente all'infinito. Teorema sul limite delle funzioni monotone (con dim.) e applicazioni. Limite di $(1+1/x)^x$ per x tendente all'infinito (con dim.). Limiti di a^x / x^p e di $x^p \log_a x$ agli estremi dei rispettivi domini (con dim.). Limite di $(a^x -1)/x$ e di $\log_a(1+x) / x$ per x tendente a 0 (con dim.).

Funzioni continue da R in R. Funzioni continue in un punto e su un insieme. Continuità di 1, di x, di |x|, di sin x, di cos x, di a^x (con dim.). Continuità della restrizione e della composta. Permanenza del segno e limitatezza locale (con dim.). Continuità della somma, del prodotto, della combinazione lineare, della reciproca e del quoziente (con dim.). Continuità dell'inversa. Continuità della radice n-esima, di $\log_a x$, di arcsin x, di arccos x, di arctg x. Estremi assoluti e zeri di funzioni. Teorema di Weierstrass. Teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano) (con dim.). Il metodo di bisezione e applicazioni. Teorema dei valori intermedi (con dim.). Teorema di connessione.

Calcolo differenziale per funzioni da R in R. Motivazioni. Rapporto incrementale e derivata. Derivata sinistra e destra. Derivabilità e funzione derivata. Derivabilità e continuità (con dim.). Derivata infinita. Approssimante lineare. Relazioni tra esistenza dell'approssimante lineare e la derivabilità (con dim.). Differenziale. Retta tangente. Applicazioni all'approssimazione. Regole algebriche di derivazione: somma, prodotto, reciproca, quoziente (con dim.). Derivazione della funzione composta (con dim.). Derivazione della funzione inversa. (cenno di dim.). Derivate delle principali funzioni elementari. Derivate successive. Gli spazi $C^n(I)$ e l'applicazione di derivazione. Proprietà locali del primo ordine: crescenza e decrescenza in un punto, estremi relativi. Relazione tra crescenza in un punto e segno della derivata (con dim.). Punti interni ad un insieme. Punti critici. Teorema di Fermat (con dim.). Teorema di Rolle, di Cauchy e di Lagrange (con dim.) e loro interpretazione geometrica. Conseguenze del teorema di Lagrange: funzioni con derivata nulla, o positiva, o negativa su un intervallo (con dim.). Applicazioni allo studio di funzioni. Infiniti e infinitesimi. Forme di indecisione. Regola di de l'Hospital (cenno di dimostrazione). Teorema sul limite della derivata (con dim.).

Confronto locale di funzioni da R in R Confronto fra ordini di infinito. Ordini di infinito reali, soprareali, sottoreali e infrareali. Infinitesimi equivalenti e ordini di infinitesimo.

Confronto fra ordini di infinitesimo. Ordini di infinitesimo reali, soprareali, sottoreali e infrareali. La notazione "*o*" di Landau.

Formula di Taylor per funzioni da R in R e applicazioni. Approssimazione locale e globale di una funzione mediante polinomi. Lemma di Peano (con dim.) e sue applicazioni al calcolo dell'ordine di infinitesimo. Teorema di Taylor (con dim. dell'esistenza del polinomio approssimante). La formula di Taylor con il resto di Peano e con il resto di Lagrange. Maggiorazione dell'errore e applicazioni all'approssimazione globale di una funzione. Sviluppi di Taylor-Maclaurin di sin x, cos x, e^x, log x, $(1+x)^a$. Proprietà del secondo ordine: convessità, concavità (locali e globali) e punti di flesso. Condizioni sulla derivata seconda sufficienti per la convessità e la concavità (con dim.). Test della derivata seconda per l'esistenza di un punto di estremo relativo (con dim.). Condizione sulla derivata seconda necessaria per esistenza di un punto di flesso. Condizione sulla derivata terza sufficiente per esistenza di un punto di flesso (con dim.).

Primitive di funzioni da R in R. Funzioni primitivabili e primitive. Caratterizzazione delle primitive di una funzione definita su un intervallo (con dim.). Integrale indefinito. Funzioni non integrabili elementarmente. Regole di primitivazione: linearità, parti, sostituzione diretta e inversa. Primitivazione delle funzioni razionali: metodo di decomposizione di Hermite. Alcune sostituzioni razionalizzanti.

Teoria dell'integrazione per funzioni da R in R. Motivazioni. Decomposizioni di un intervallo e relative proprietà. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato. Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann. Integrabilità delle funzioni continue. Integrabilità delle funzioni monotone (con dim.). Proprietà dell'integrale: integrabilità della combinazione lineare e linearità, monotonia (con dim.), integrabilità del valore assoluto, integrabilità del prodotto, teorema della media integrale (con dim.), additività rispetto al dominio, integrabilità della restrizione. Funzioni localmente integrabili. Integrale orientato. Regola di Chasles (con dim.). Teorema del valore assoluto per l'integrale orientato. Funzione integrale. Continuità della funzione integrale (con dim.). Teorema fondamentale del calcolo (con dim.). Derivazione di funzioni definite da integrali. Esistenza di una primitiva di una funzione continua (con dim.). Teorema di Torricelli (con dim.). Regole di integrazione definita: parti e sostituzione (con dim.). Integrazione di funzioni con particolari simmetrie: pari, dispari, periodiche. Misura di un insieme normale nel piano.

Integrale in senso generalizzato per funzioni da R in R. Motivazioni. Integrale in senso generalizzato. Integrazione in senso generalizzato delle funzioni campione. Criterio del confronto. Funzioni assolutamente integrabili e semplicemente integrabili in senso generalizzato. Relazioni tra l'assoluta integrabilità e l'integrabilità in senso generalizzato. Criterio dell'ordine di infinitesimo (con dim.). Criterio dell'ordine di infinito. Misura in senso generalizzato di un insieme normale.

BIBLIOGRAFIA

- Dispense disponibili in rete.
- M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Matematica, Calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli, Bologna, 2000.
- R.A. Adams, Calcolo differenziale 1 e 2, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1992.

Trieste, 22.12.2001