

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Prova 1

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di Studi in Ingegneria _____

QUESITO N. 1. Si descriva la disuguaglianza di Bessel in uno spazio di Hilbert, mostrando poi il caso particolare delle serie di Fourier.

QUESITO N. 2. Si enunci il teorema di Shannon sul campionamento.

QUESITO N. 3. Si consideri l'equazione del calore (E) $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ in $]0, \pi[\times]0, +\infty[$.

(i) Si verifichi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $\varphi_n(x, t) = e^{-n^2 t} \sin(nx)$ risolve l'equazione (E).

(ii) Si determini lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione $f :]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$.

(iii) Si determini la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) & \text{in }]0, \pi[\times]0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) & \text{in }]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = x & \text{in }]0, \pi[\end{cases} .$$

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

QUESITO N. 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza λ_f . Si provi che anche la funzione $g(t) = t \cdot f(t)$ è trasformabile con ascissa di convergenza λ_f . In quale importante teorema viene utilizzata questa proprietà?

QUESITO N. 5. Si enunci il teorema di Liouville e si citi una sua importante applicazione.

QUESITO N. 6. Si consideri la funzione razionale

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$$

(i) Si determinino le singolarità di f e si calcolino i residui in tali punti.

(ii) Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent della funzione f in un intorno forato di $z = 0$.

(iii) Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent della funzione f in un intorno forato di $z = -1$.