

Università di Trieste

Tutti i corsi di laurea in ingegneria

Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (030IN); parte del corso tenuta dal prof. F. Obersnel
Anno Accademico 2016/2017

L'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi. Motivazioni e premesse storiche. Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Somma e prodotto di numeri complessi, opposto e reciproco di un numero complesso. Proprietà algebriche. Il campo dei numeri complessi. Numeri reali come particolari numeri complessi. Coniugato di un numero complesso. Piano di Gauss - Argand. Forma polare di un numero complesso. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Proprietà del modulo. Notazione esponenziale e giustificazione con le serie di potenze. Prodotto e potenze di numeri complessi in forma polare: formule di De Moivre. Interpretazione del prodotto come rotazione nel piano di Gauss. Forma matriciale di un numero complesso. Soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione $z^n = w$: radice n -esima di un numero complesso. Topologia in \mathbb{C} . Struttura metrica di \mathbb{C} . Palla aperta $B(z_0, r)$. Intorno di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Piano complesso esteso e cenni alla sfera di Riemann. Intorno di ∞ . Punti interni, punti di frontiera, punti di accumulazione di un insieme. Insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme. Successioni di numeri complessi. Limite di una successione. Insiemi limitati, Insiemi compatti (per successioni). Un insieme in \mathbb{C} è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Funzioni complesse di variabile complessa. Parte reale e parte immaginaria di una funzione f . Interpretazione di una $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ come mappa di \mathbb{R}^2 . Esempi: traslazioni, rotazioni, riflessioni. Limite finito e infinito per $z \rightarrow z_0$ o per $z \rightarrow \infty$ di una funzione. Funzioni continue. Teorema sul limite delle componenti. Teoremi di continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Curve parametriche in \mathbb{C} . Insiemi connessi (per archi). Teorema di connessione. Teorema di Weierstrass. Continuità delle funzioni razionali. La funzione argomento principale non è continua. La funzione radice n -esima (determinazione principale). Funzione derivabile in un punto. Teoremi di derivabilità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta (sole enunciati). Teorema di continuità di una funzione derivabile. Teorema sulle funzioni con derivata nulla. Funzioni differenziabili. Equivalenza tra derivabilità e differenziabilità. Condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann. Interpretazione geometrica delle condizioni di Cauchy-Riemann. Derivata e condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare. Le condizioni di Cauchy-Riemann non sono sufficienti per la derivabilità. Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili. Funzioni olomorfe. Funzioni intere. Un esempio di una funzione derivabile in un punto non olomorfa. Serie di potenze. Disco e raggio di convergenza, derivazione a termine a termine. Funzione esponenziale, funzioni circolari e funzioni iperboliche. Proprietà della funzione esponenziale, funzione logaritmo (determinazione principale). Proprietà delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche, formule di addizione, parti reale e immaginaria delle funzioni circolari. Equazioni del tipo $\sin z = c$.

Integrazione complessa e il Teorema di Cauchy. Curve regolari e regolari a tratti in \mathbb{C} . Curve concatenate. Curve semplici, curve chiuse. Circuiti (lacci). Curve equivalenti, orientazione di una curva. Curva $-\gamma$. Integrale su una curva di una funzione complessa. Proprietà dell'integrale: linearità, additività, integrale della curva $-\gamma$, indipendenza dalla parametrizzazione equiversa, formula di stima del modulo dell'integrale. Passaggio del limite nell'integrale in caso di convergenza uniforme. Primitive e funzioni primitivabili. Formula di Torricelli-Barrow in \mathbb{C} . Circuitazione (integrale su una curva chiusa) di una funzione primitivabile. La funzione $\frac{1}{z}$ non è primitivabile sul suo dominio. Teorema della curva chiusa di Jordan (solo enunciato). Interno e esterno di un circuito. Teorema di Cauchy (dimostrazione per funzioni C^1 e curve regolari a tratti). Il teorema dei due circuiti. Formula integrale di Cauchy per una funzione. Funzioni analitiche in \mathbb{C} . Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe. Formule integrali di Cauchy per le derivate. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Le funzioni primitivabili sono olomorfe. Il teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili. Teorema di Morera. Funzioni localmente primitivabili. Aperti semplicemente connessi. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Ordine di uno zero di una funzione analitica. Proprietà degli insiemi degli zeri di una funzione analitica: una proposizione sulle funzioni che in un punto hanno tutte le derivate nulle, un lemma sugli insiemi connessi, un teorema sulle funzioni localmente nulle, il principio di identità per le funzioni analitiche. Prolungamento analitico. Unicità del prolungamento analitico.

Punti singolari di una funzione e teoria dei residui. Punti singolari isolati di una funzione. Intorni forati. Classificazione delle singolarità: singolarità eliminabile (definizione, esistenza del limite e del

prolungamento analitico), polo di ordine n (definizione, esistenza del limite, caratterizzazione dell'ordine), singolarità essenziale (definizione, non esistenza del limite). Esempio di singolarità essenziale. Teorema di Picard (solo enunciato). Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. Formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n . Formula per il calcolo del residuo di funzioni razionali nei poli semplici con utilizzo della derivata del denominatore. Osservazione sui residui nei poli coniugati delle funzioni razionali a coefficienti reali. Serie bilatera. Insieme di convergenza di una serie bilatera. Corona circolare $C(z_0, R_1, R_2)$. Teorema di Laurent. Parte caratteristica di una serie bilatera. Classificazione delle singolarità e serie di Laurent. Residuo di una serie di Laurent. Esempio di applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo dei termini di una serie di Laurent. Esempio di applicazione del “metodo delle derivate” per il calcolo della parte caratteristica di una serie di Laurent. Funzioni razionali: metodo dei residui per la decomposizione in frazioni semplici. Il teorema dei residui. Calcolo di integrali con il metodo dei residui. Integrali del tipo $\int_{\gamma} f(z) dz$. Valor principale (di Cauchy) e integrali del tipo $PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ o $PV \int_a^b f(x) dx$ con una singolarità in $[a, b]$. Lemma del grande cerchio e lemma del piccolo cerchio e loro applicazioni. Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(t) dt$ con f funzione di $\sin t$ e $\cos t$. Lemma di Jordan. Applicazioni al calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$ e delle trasformate di Fourier. L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Trasformate di Laplace. Trasformata di Laplace di un segnale. Funzioni di ordine esponenziale. Funzione di Heaviside. Linearità della trasformata. Teorema sul dominio della trasformata. Ascissa, retta, semipiano di convergenza. Convergenza uniforme dell'integrale. Analiticità della trasformata. La trasformata è infinitesima per $\Re(s) \rightarrow +\infty$. Derivata k -esima della trasformata. Trasformata di una funzione polinomiale. Smorzamento, traslazione, riscaldamento. Trasformata delle funzioni $\sin(\omega t)$, $\sinh(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, $\cosh(\omega t)$. Funzioni “porta” e impulso di durata h , cenni alla distribuzione delta di Dirac δ_0 e alla sua trasformata. La funzione Gamma di Eulero e le sue principali proprietà. Trasformata delle funzioni t^α (in particolare $f(t) = \sqrt{t}$ e $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$). Esempio di trasformata di una funzione definita a tratti. Trasformata di una funzione periodica. Trasformata della derivata (dimostrazione nel caso in cui f' e f sono trasformabili). Trasformata della derivata n -esima. La formula per funzioni con discontinuità isolate di tipo salto. Prodotto di convoluzione di due funzioni; trasformata del prodotto di convoluzione (dimostrazione per funzioni di ordine esponenziale). Trasformata della primitiva. Applicazione delle trasformate alle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. Funzione di trasferimento, risposta impulsiva, risposta forzata. Il problema della trasformata inversa. Iniettività dell'operatore \mathcal{L} sulle funzioni continue a tratti (solo enunciato). La formula di Bromwich-Mellin / Riemann-Fourier (solo enunciato). Esempio di calcolo dell'antitrasformata usando la formula. Scorciatoie per il calcolo dell'antitrasformata. Antitrasformata delle funzioni razionali. I teoremi del valore finale e del valore iniziale (dimostrazioni nel caso di f' integrabile). Trasformate del seno cardinale e del seno integrale. Applicazione delle trasformate ai sistemi lineari. Applicazione delle trasformate alle funzioni integrali e integro-differenziali. Esempio di applicazione delle trasformate alle equazioni alle derivate parziali; il caso dell'equazione del calore. Applicazioni ai circuiti elettrici; ammettenza e impedenza di trasferimento.

Testi consigliati

G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna, 2007.

G. Tironi, Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (scaricabile dal sito).

Alla pagina <http://www.dmi.units.it/~obersnel> potete trovare ulteriori informazioni sul corso, gli esercizi assegnati a lezione, esempi di compiti d'esame.