

**Università di Trieste**  
– **Corso di studio: ME14 - TECNICHE DI RADIOLOGIA MEDICA,**  
**PER IMMAGINI E RADIOTERAPIA.**

**Alcuni esercizi sulle funzioni**

*Professor Franco Obersnel*

File aggiornato al giorno 1 ottobre 2018.

**Esercizio 1** Si stabilisca se le seguenti relazioni  $f : A \rightarrow B$  sono funzioni; in caso affermativo si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biiettive:

(a)  $A = \{\text{studenti del corso}\}$ ,  $B = \{\text{nomi di persona}\}$ ,  $f(s)$  è il nome dello studente  $s$ .

(b)  $A = \{\text{studenti del corso}\}$ ,  $B = \mathbb{R}$ ,  $f(s)$  è la pressione massima del sangue dello studente  $s$  misurata in un determinato momento da un determinato apparecchio.

(c)  $A = \{\text{sedie presenti in aula e occupate}\}$ ,  $B = \{\text{studenti del corso presenti in aula}\}$ ,  $f(s)$  è lo studente che in un dato momento occupa la sedia  $s$ .

(d)  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = n - 3$ .

(e)  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = y$  tale che  $x^4 + y^4 = 1$ .

(f)  $A = [-1, 1]$ ,  $B = [0, +\infty[$ ,  $f(x) = y$  tale che  $x^4 + y^4 = 1$ .

**Soluzioni**

(a) La relazione è una funzione, non suriettiva (nessun studente si chiama Asdrubale...). Sarà iniettiva se e solo se non ci sono due studenti con lo stesso nome.

(b) La relazione è una funzione, non suriettiva. Sarà iniettiva se e solo se non ci sono due studenti con la stessa pressione massima.

(c) La relazione è una funzione biiettiva.

(d) La relazione è una funzione iniettiva, non suriettiva.

(e) La relazione non è una funzione (ad esempio non esiste alcun valore  $y$  da associare a  $x = 2$ ).

(f) La relazione è una funzione. Non è iniettiva (ad esempio  $f(\frac{-1}{2}) = f(\frac{1}{2})$ ) e non è suriettiva.

**Esercizio 2** Si risolvano in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

(a)  $|x + 2| < 3$ ,

(b)  $2 + |x - 1| < 5$ ,

(c)  $|1 - x| > 2$ .

**Soluzioni**

(a)  $] - 5, 1[$ . (b)  $] - 2, 4[$ . (c)  $] - \infty, -1[ \cup ] 3, +\infty[$ .

**Esercizio 3** Si considerino le funzioni

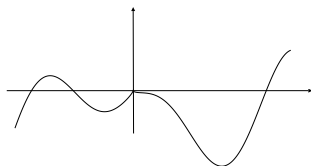
$$f(x) = x^2 - 4; \quad g(x) = x - 2; \quad h(x) = 2.$$

Si scriva l'espressione analitica delle funzioni composte:  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$ ,  $f(h(x))$ ,  $h(f(x))$ ,  $g(h(x))$ ,  $h(g(x))$ .

**Soluzioni**

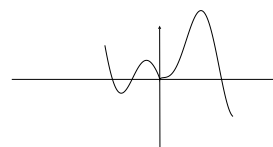
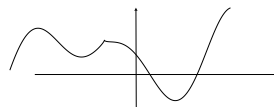
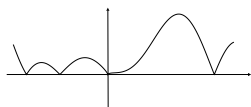
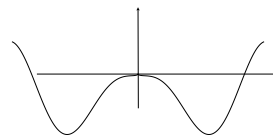
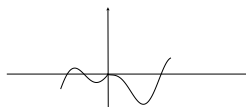
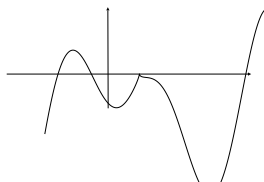
Nell'ordine:  $x^2 - 4x$ ,  $x^2 - 6$ , 0, 2, 0, 2.

**Esercizio 4** Si consideri la funzione  $f$  il cui grafico è rappresentato nel diagramma seguente:



Nei diagrammi seguenti sono riportati, ma non nell'ordine, i grafici delle funzioni:

- (a)  $f_1(x) = \frac{1}{2}f(2x)$ , (b)  $f_2(x) = f(|x|)$ , (c)  $f_3(x) = -f(2x)$ ,  
 (d)  $f_4(x) = |f(x)|$ , (e)  $f_5(x) = 2f(x - \frac{1}{2})$ , (f)  $f_6(x) = f(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$ .



Si determinino le funzioni a cui corrispondono i grafici rappresentati.

**Soluzione** Nell'ordine i grafici si riferiscono alle funzioni: (e), (a), (b), (d), (f), (c).

**Esercizio 5** Si determini il periodo (minimo) della funzione

$$f(x) = \sin(3x) + \cos(5x).$$

**Soluzione**  $2\pi$  (I periodi di  $\sin(3x)$  sono  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \dots$ , quelli di  $\cos(5x)$  sono  $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{10\pi}{5}, \dots$ . Il più piccolo periodo in comune è dunque  $2\pi$ .)

**Esercizio 6** Di una progressione aritmetica  $(a_n)_n$  si conoscono  $a_7 = 17$  e  $a_3 = 1$ . Si determinino  $a_0$ , e la ragione  $q$  della progressione.

**Soluzione**  $q = 4$ ,  $a_0 = -11$ .

**Esercizio 7** Di una progressione geometrica  $(b_n)_n$  si conoscono  $b_1 = 1$  e  $b_4 = 2$ . Si determinino  $b_2$ ,  $b_3$  e la ragione  $q$  della progressione.

**Soluzione**  $q = \sqrt[3]{2}$ ,  $b_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ,  $b_2 = \sqrt[3]{2}$ ,  $b_3 = \sqrt[3]{2^2}$ .

**Esercizio 8** In una coltura batterica sono presenti inizialmente  $N_0$  batteri. Il loro numero raddoppia dopo 2 ore e 50 minuti. Quanti batteri saranno presenti dopo 24 ore? Quando il numero di batteri sarà pari al 25% della quantità finale?

**Soluzione** Circa  $256N_0$ ; circa dopo 17 – 18 ore.

2 ore e 50 minuti sono  $\frac{17}{6}$  di ora. Questo è il tempo di raddoppio della popolazione. In 24 ore ci sono  $24 \cdot \frac{6}{17}$  tempi di raddoppio che possiamo approssimare a 8. Perciò la popolazione dopo 24 ore sarà circa  $N_8 = N_0 \cdot 2^8 = 256N_0$ . La quantità di batteri sarà pari ad  $\frac{1}{4}$  della popolazione finale due tempi di raddoppio prima, quindi dopo 6 tempi di raddoppio, circa dopo 17 – 18 ore (l'incertezza è causata dall'approssimazione).

**Esercizio 9** Si scriva l'equazione cartesiana della retta passante per i due punti  $(1, -2)$  e  $(e, 3)$ .

**Soluzione**  $y = \frac{5}{e-1}x - \frac{5}{e-1} - 2$

**Esercizio 10** Si consideri la funzione

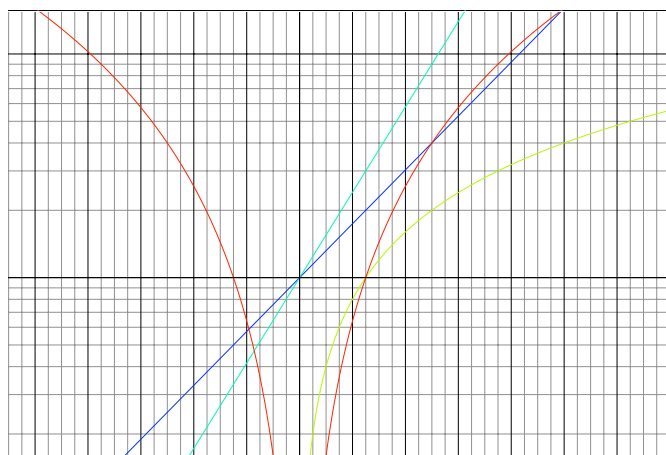
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si verifichi che  $f(x) \leq \frac{1}{2\sigma}$  se  $|x - \mu| \geq \sigma$ .

**Soluzione** Se  $|x - \mu| \geq \sigma$  si ha  $\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \leq -\frac{1}{2}$  e quindi, per la crescenza della funzione esponenziale,  $f(x) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{e}}$ . Osservando poi che  $e > 2$  e  $\pi > 1$  si conclude  $f(x) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{4\pi}} < \frac{1}{2\sigma}$ .

**Esercizio 11** Il diagramma seguente è in scala lineare in ascissa e logaritmica in ordinata. Si identifichino sul diagramma le funzioni:

$$(a) f_1(t) = t, \quad (b) f_2(t) = 2^t, \quad (c) f_2(t) = 3^t, \quad (d) f_4(t) = t^2.$$

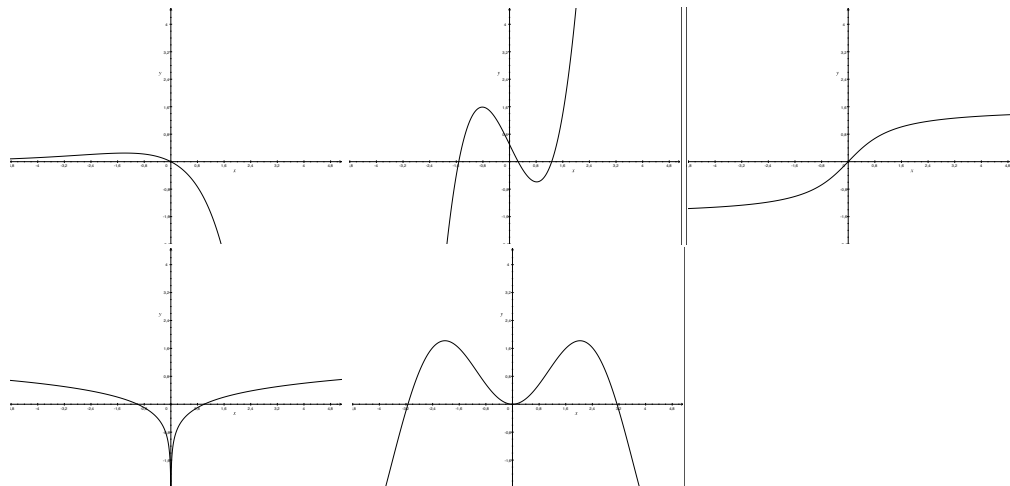


**Soluzioni I** grafici delle funzioni sono, nell'ordine: giallo-verdino, azzurro, celeste, rosso.

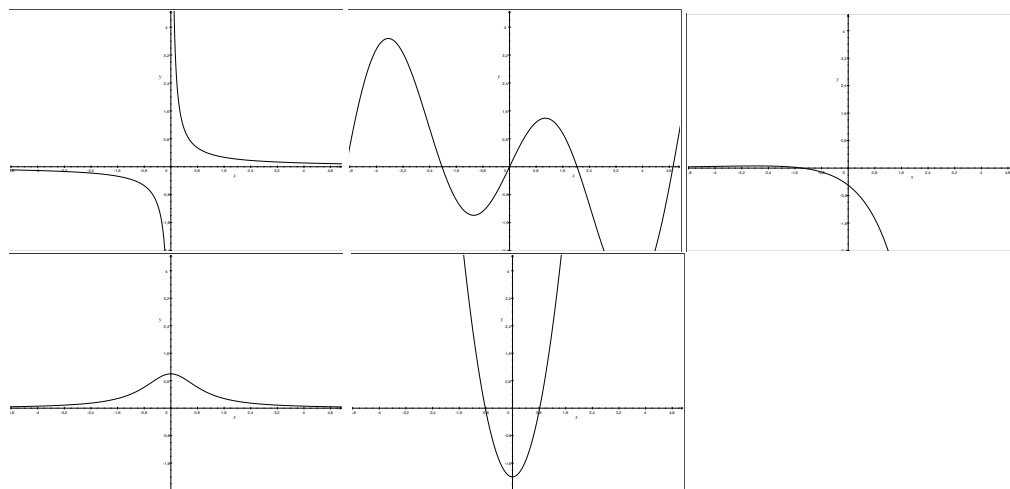
**Esercizio 12** Nei diagrammi seguenti sono riportati i grafici di alcune funzioni, nell'ordine,  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ .

Successivamente sono riportati i grafici delle derivate delle funzioni, ma non nell'ordine. Si stabilisca la corretta corrispondenza tra i grafici.

Funzioni:



Derivate:



**Soluzioni** 1-3; 2-5; 3-4; 4-1; 5-2.